В.П.Воронин, М.В.Федотов

ПОДГОТОВКА К ВСТУПИТЕЛЬНЫМ ЭКЗАМЕНАМ В МГУ
ГЕОМЕТРИЯ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
Москва 2001

Настоящее пособие составлено для подготовительных курсов факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова на основе задач письменных вступительных экзаменов по математике в МГУ за 1970-2000 годы. Может быть полезно абитуриентам при подготовке к поступлению как на факультет ВМиК, так и на другие факультеты МГУ.

СОДЕРЖАНИЕ

Настоящее пособие составлено для подготовительных курсов факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В.Ломоносова на основе задач письменных вступительных экзаменов по математике в МГУ за 1970-2000 годы.

Раздел "Планиметрия" составлен М.В.Федотовым на основе задач письменных вступительных экзаменов по математике в МГУ за 1977-2000 годы.

Раздел "Стереометрия" составлен В.П.Ворониным на основе задач письменных вступительных экзаменов по математике в МГУ за 1970-2000 годы.

После номера каждой задачи в скобках идет ссылка - где была данная задача. Сначала идет сокращенное название факультета, затем - год, в котором была задача (если после года в скобках идет цифра 1 или 2 - это значит, что эта задача была на весенней олимпиаде факультета; на мехмате и физфаке весной проходят две олимпиады; на ВМиК, геологическом, химическом, географическом факультетах и факультете почвоведения - одна олимпиада весной). После точки идет номер задачи в варианте (обычно, чем больше номер, тем сложнее задача в данном варианте). Например, (ВМиК-98.3) - означает, что задача была в 1998 году летом на вступительных экзаменах на факультете ВМиК, третьим номером в варианте, а (м/м-97(2).1) - означает, что задача была в 1997 году на второй весенней олимпиаде механико- математического факультета первым номером в варианте. Если после номера стоит буква С или Н, это означает, что задача давалась по старой или новой программе по математике соответственно.

А теперь сокращения факультетов, принятые в данной книге:

м/м - механико- математический факультет,

ВМиК - факультет Вычислительной математики и кибернетики,

физ - физический факультет,

хим - химический факультет,

ВКНМ - Высший колледж наук о материалах,

биол - биологический факультет,

почв - факультет почвоведения,

геол - геологический факультет (.ОГ - отделение общей геологии),

геогр - географический факультет,

экон - экономический факультет (.К - отделение экономической кибернетики, .М - отделение менеджмента, .В - вечернее отделение),

псих - факультет психологии,

фил - философский факультет,

филол - филологический факультет,

соц - социологический факультет,
ИСАА - Институт стран Азии и Африки.

При подготовке даного пособия использовалась следующая литература, в которой можно найти решения задач и другие полезные сведения.

Литература

1.Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К. "Задачи вступительных экзаменов по математике", (Варианты за 1977-1983 годы).
2.Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К. "Задачи вступительных экзаменов по математике", (Варианты за 1984-1989 годы).
3."Московский университет. Варианты вступительных экзаменов по математике за 1983-1991 годы на все факультеты МГУ с ответами, указаниями, решениями".
4."Математика. Задачи вступительных экзаменов с ответами и решениями (1993-1997 гг.)". Составители: Мельников И.И., Олехник С.Н., Сергеев И.Н.
5.Будак А.Б., Щедрин Б.М. "Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы".
6."Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1992 г.)".
7."Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1997, 1998, 1999, 2000 гг.)". М., Механико-математический факультет МГУ.
8."Задачи вступительных экзаменов по математике (1997–1998, 1999, 2000 гг.)". М., факультет ВМиК МГУ.
9.Ткачук В.В. "Математика — абитуриенту. "
10.Шарыгин И.Ф. "Задачи по геометрии. Стереометрии". (Библиотечка "Квант". Выпуск 31.)
11.Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. "Задачи по стереометрии".
12.Бескин Л.Н., Бескин В.Л. "Многогранники".
13.Шарыгин И.Ф. "Геометрия. Стереометрия. !)–11 классы: Пособие для учащихся". (- М.: Дрофа, 1998. — 272 с.)
14.Выгодский М.Я. "Справочник по элементарной математике".
15.Ежегодные справочники: "Московский университет".

Данное пособие может быть полезно абитуриентам при подготовке к поступлению как на факультет ВМиК, так и на другие факультеты МГУ.

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛАНИМЕТРИЯ

СТЕРЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

§1. Прямоугольные треугольники

Чтобы решать задачи на прямоугольные треугольники необходимо знать следующие формулы и теоремы.

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$, где a, b– катеты прямоугольного треугольника, c - гипотенуза.

Соотношения в прямоугольном треугольнике:

$$a = b \cdot \text{tg} A = b \cdot \text{ctg} B = c \cdot \sin A = c \cdot \cos B,$$

$$b = a \cdot \text{tg} B = a \cdot \text{ctg} A = c \cdot \sin B = c \cdot \cos A,$$

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos A}.$$

Различные формулы площади произвольного треугольника:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C, \quad S = \frac{1}{2} ch_c, \quad S = pr, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Здесь и ниже a, b, c - стороны треугольника, A, B, C - соответствующие противоположные им углы, h_c - высота, проведенная к стороне c, p– полупериметр треугольника, r - радиус вписанной в треугольник окружности, R - радиус описанной около треугольника окружности.

Теорема синусов: $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Теорема косинусов: $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Биссектриса любого угла треугольника делит противоложную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в этой точке на отрезки, длины которых относятся как 2:1, считая от вершины.

Около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам. Причем этот центр лежит внутри треугольника, если он остроугольный; вне треугольника, если он тупоугольный; на середине гипотенузы, если он прямоугольный.

Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения биссектрис трех углов треугольника, причем всегда внутри треугольника.

1. (геол.ОГ-83.2) В треугольнике ABC угол BAC прямой, $AB = 1$, $BC = 3$. Точка K делит сторону AC в отношении 7:1, считая от точки A. Что больше: AC или BK?

2. (геол.ОГ-88.1) Катеты прямоугольного треугольника ABC $AB = 1, AC = 2$. На AB как на стороне построен квадрат $ABDE$. Определить, что больше: $AC + BC$ или $3 \cdot AD$.

3. (химфак-95.4) В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что $CD = CE = 1$. Точка O есть точка пересечения отрезков AD и BE. Площадь треугольника BOD больше площади треугольника AOE на $\frac{1}{2}$. Известно, что $|AD| = \sqrt{10}$. Найти гипотенузу AB.

4. (геогр-77.2) В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 3, высота CD, опущенная на сторону AB, имеет длину $\sqrt{3}$. Основание D высоты CD лежит на стороне AB, $|AD| = |BC|$. Найти длину стороны AC.

5. (экон.М-97.3) В треугольнике ABC со стороной $AB = \sqrt{5}$ из вершины B к стороне AC проведены медиана $BM = 2\sqrt{2}$ и высота $BH = 2$. Найти сторону BC, если известно, что $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} < 90°$.

6. (физфак-94.4) В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и на боковую сторону, равны соответственно m и n. Найти стороны треугольника.

7. (филолог-90.3) В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CM и высота CH. Найдите

отношение $|AH| : |AM|$, если $|CM| : |CH| = 5 : 4$ и точка H находится между точками A и M.

8. (филол-98.2) Длина стороны BC треугольника ABC равна 12. Около треугольника описана окружность радиуса 10. Найти длины сторон AB и AC треугольника, если известно, что радиус OA окружности делит сторону BC на два равных отрезка.

9. (ВМиК-89.1) Можно ли разместить прямоугольный треугольник с углом 30° и прилежащим катетом $\sqrt{6}$ внутри круга радиуса $\sqrt[4]{5}$?

10. (физфак-88.2) В прямоугольном треугольнике величина острого угла равна α, а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен R. Найти длину высоты треугольника, опущенной на гипотенузу.

11. (психфак-80.3) В треугольнике ABC угол A прямой, величина угла B равна 30°. В треугольник вписана окружность, радиус которой равен $\sqrt{3}$. Найти расстояние от вершины C до точки касания этой окружности с катетом AB.

12. (почв-89.4) В прямоугольном треугольнике ABC длина катета AB равна 4, а длина катета AC равна 3. Точка D делит гипотенузу пополам. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольник ADC и в треугольник ABD.

13. (физфак-95.4) В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна с, а острый угол равен α. Найти биссектрису прямого угла.

14. (физфак-95.4) В треугольнике даны два угла α и β и радиус R описанной окружности. Найти высоту, опущенную из вершины третьего угла треугольника.

15. (ВМиК-81.3) В треугольнике ABC величина угла BAC равна $\pi/3$, длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB, равна $\sqrt{3}$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 5. Найти длины сторон треугольника ABC.

16. (физфак-97.4) В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 20, а диаметр описанной окружности равен 25. Найти радиус вписанной окружности.

17. (мехмат-84.3) Из середины D гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведен луч, перпендикулярный к гипотенузе и пересекающий один из катетов. На нем отложен отрезок DE, длина которого равна половине длины отрезка AB. Длина отрезка CE равна 1 и совпадает с длиной одного из катетов. Найти площадь треугольника ABC. Представить приближенное значение этой площади в виде десятичной дроби с точностью до 0.01.

18. (физфак-83.5) Прямая, параллельная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, пересекает катет AC в точке D, а катет BC– в точке E, причем длина отрезка DE равна 2, а длина отрезка BE равна 1. На гипотенузе взята точка F так, что $|BF| = 1$. Известно также, что величина угла FCB равна α. Найти площадь треугольника ABC.

19. (геол.ОГ-77.4) В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса BE прямого угла B делится центром O вписанной окружности в отношении $|BO| : |OE| = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Найти острые углы треугольника.

20. (геол-83.2) В треугольнике ABC угол BAC прямой, $AB = 1$, $BC = 2$. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке L. G - точка пересечения медиан треугольника ABC. Что больше, BL или BG ?

21. (экон.К-83.4) В треугольнике ABC медианы, проведенные к сторонам AC и BC пересекаются под прямым углом. Известно, что $|AC| = b, |BC| = a$. Найти длину стороны AB.

22. (физфак-94.6) В треугольнике ABC медианы AD и CE взаимно перпендикулярны, $|AB| = c, |BC| = a$. Найти сторону AC.

23. (физфак-94.4) В прямоугольном треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно 2:5. Найти острые углы треугольника.

24. (ВМиК-88.3) Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности радиуса 10. Вершина C лежит на диаметре окружности, который параллелен гипотенузе. Угол CAB составляет $75°$. Найти площадь треугольника ABC.

25. (ВМиК-77.2) В треугольнике, один из углов которого равен разности двух других, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найти длину большей стороны треугольника.

26. (химфак-97.5) Середины высот треугольника ABC лежат на одной прямой. Наибольшая сторона треугольника $|AB| = 10$. Какое максимальное значение может принимать площадь треугольника ABC?

27. (геогр-94.4) Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найти длину отрезка CN, если катеты равны 1 и 4.

28. (геол.-96.6) Катеты прямоугольного треугольника равны 36 и 48. Найти расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до высоты проведенной к гипотенузе.

§2. Общие треугольники

Чтобы решать задачи на общие треугольники необходимо дополнительно к формулам и теоремам §1 знать следующие формулы и теоремы.

Соответствующие и накрестлежащие углы при параллельных прямых равны.

Теорема Фалеса: Если на одной стороне угла отложены равные между собой отрезки и через них проведены параллельные прямые до пересечения с другой стороной угла, то на этой стороне отложатся равные между собой отрезки.

Формула медианы треугольника через три стороны:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4},$$

где a, b, c – стороны треугольника, а m_a – медиана, проведенная к стороне a. Эту формулу легко доказать, применив два раза теорему косинусов.

Сформулирем утверждение, которое значительно упрощает решение некоторых задач этого параграфа:

Теорема 1. $l_a^2 = bc - a_b a_c$, где l_a - биссектриса, проведенная к стороне a, a_b, a_c – отрезки, на которые биссектриса делит сторону a, прилежащие к сторонам b и c соответственно.

Предлагаем самостоятельно доказать эту теорему. При доказательстве надо использовать теорему косинусов и сформулированное в §1 свойство биссектрисы.

1. (ВМиК-89.1) Можно ли разместить равносторонний треугольник со стороной 3 внутри круга радиуса $\sqrt[4]{10}$?

2. (ВМиК-89.1) Можно ли разместить круг радиуса $\sqrt[3]{17}$ внутри правильного треугольника со стороной $2\sqrt[6]{11}$.

3. (химфак-96.4) В треугольнике ABC сторона AC не длиннее 3, сторона BC не длиннее 4, а его площадь не меньше 6. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности.

4. (физфак-89.2) В остроугольном треугольнике площади S известны величины α и β углов A и B. Найти длину высоты, опущенной на сторону, прилежащую к углам A и B.

5. (психфак-94.3) В тупоугольном треугольнике ABC на стороне AB длины 14 выбрана точка L равноудаленная от прямых AC и BC, а на отрезке AL - точка K равноудаленная от вершин A и B. Найти синус угла ACB, если $|KL| = 1, \widehat{CAB} = 45°$.

6. (химфак-79.4) Из точки M, расположенной внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры на стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k, b и m, c и n. Вычислить отношение площади треугольника к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

7. (геол.-86.2) Длины сторон AB, BC, AC треугольника ABC образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найти отношение высоты треугольника, опущенной на сторону BC из вершины A, к радиусу вписанной окружности.

8. (геогр-86.4) Внутри треугольника ABC взята точка K. Известно, что $AK = 1$, $KC = \sqrt{3}$, $\widehat{AKC} = 120°$, $\widehat{ABK} = 15°$, $\widehat{KBC} = 15°$. Найти длину отрезка BK.

9. (геол.ОГ-78.4) В треугольнике ABC $|AC| = 3$, $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$ и радиус описанной окружности равен 2. Доказать, что площадь треугольника ABC меньше 3.

10. (физфак-93.4) В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник ABC ($|AB| = |BC|$) с углом BAC, равным α. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

11. (геол.ОГ-84.4) В треугольнике ABC $AB = 4, CA = 3$, угол C– острый. Найти площадь треугольника, если $\sin(\widehat{ACB} - \widehat{ABC}) = \frac{7}{25}$.

12. (геол-88.4) Точка O лежит на отрезке AB так, что $AO = 13$, $OB = 7$. С центром в O проведена окружность радиуса 5. Из A и B к ней проведены касательные, пересекающиеся в точке M, причем точки касания лежат по одну сторону от прямой AB. Найти радиус окружности, описанной около треугольника AMB.

13. (геол-84.4) В треугольнике ABC $BC = 4$, $AB + AC = 6$. Найти площадь треугольника ABC, если $\cos \widehat{ACB} = \frac{5}{12}$.

14. (мехмат-90.1) В треугольнике ABC $BC = 6, AC = 5, \widehat{ABC} = 30°$. Найдите площадь треугольника, если расстояние от вершины A до прямой BC меньше $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

15. (физфак-95.4) В остроугольном треугольнике ABC $BC = a$, $AC = b, \widehat{ACB} = \alpha$. Найти высоту CD и угол ABC.

16. (экон-98.6) Вокруг треугольника MKH описана окружность радиуса r с центром в точке O. Длина стороны HM равна a. Для сторон треугольника выполнено соотношение $HK^2 - HM^2 = HM^2 - MK^2$. Найти площадь треугольника OLK, где L – точка пересечения медиан треугольника MKH.

17. (экон.М-95.5) В треугольнике ABC $|AB| = 6, \widehat{BAC} = 30°$, радиус описанной окружности равен 5. Найти сторону AC.

18. (социол.-97.2) В треугольнике ABC $|AB| = 4, |BC| = 5$. Из вершины B проведен отрезок BM $(M \in AC)$, причем $\widehat{ABM} = 45°$, $\widehat{MBC} = 30°$
    а) В каком отношении точка M делит сторону AC?
    б) Вычислите длины отрезков AM и MC.

19. (химфак-88.4) В треугольник ABC с длиной стороны BC равной 9 вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке D. Известно, что $AD = DC, \cos\widehat{BCA} = \dfrac{2}{3}$. Найти длину стороны AC.

20. (геол.-94.7) У треугольника известны длины двух сторон $a = 2$, $b = 3$ и площадь $S = 3\sqrt{15}/4$. Медиана, проведенная к его третьей стороне, меньше ее половины. Найти радиус описанной около этого треугольника окружности.

21. (ВМиК-96.4) Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Периметр треугольника AMN равен $3\sqrt[4]{2}, |BC| = \sqrt[4]{2}$, а отрезок AO втрое больше радиуса вписанной в треугольник ABC окружности. Найти площадь треугольника ABC.

22. (филолог-84.4) В треугольнике ABC длины сторон AB и AC равны 3 и 2 соответственно. На стороне AB выбрана точка M, а на стороне AC - точка N так, что $|AM| = 2, |AN| = 1.5$. Найти площадь треугольника AMN, если длина стороны BC больше длины отрезка MN в $\frac{6}{\sqrt{17}}$ раз.

23. (биофак-86.4) В треугольнике ABC $|AB| = \frac{5\sqrt{2}}{2}, |BC| = \frac{5\sqrt{5}}{4}$. Точка M лежит на стороне AB, точка O лежит на стороне BC, причем прямые MO и AC параллельны. $|BM| = 1.5|AM|$. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MO в точке P, лежащей между точками M и O, причем радиус окружности, описанной около треугольника AMP, равен $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Найти длину стороны AC.

24. (ИСАА-92.4) Дан треугольник со сторонами 4; 8; 9. Найти длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.

25. (ВМиК-94.4) В треугольнике ABC сторона AB равна 21, биссектриса BD равна $8\sqrt{7}$, а отрезок DC равен 8. Найти периметр треугольника ABC.

26. (психфак-95.4) В треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и AE углов ABC и BAC соответственно, которые пересекаются в точке O. Известно, что $|AB| = |BL|$, периметр треугольника равен 28, $|BO| = 2 \cdot |OL|$. Найти сторону AB.

27. (геол.-89.4) В треугольнике ABC проведена биссектриса CD, при этом величины углов ADC и CDB относятся как 7:5. Найти $|AD|$, если известно, что $|BC| = 1, \widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$.

28. (геогр-85.4) Величины углов A, B и C треугольника ABC составляют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{7}$. Биссектрисы этого треугольника пересекаются в точке D. Точки A', B' и C' находятся на продолжениях отрезков DA, DB, DC за точки A, B, C соответственно на одинаковом расстоянии от точки D. Доказать, что величины углов A', B', C' треугольника $A'B'C'$ также образуют арифметическую прогрессию. Найти её разность.

29. (почв-83.4) В треугольнике ABC биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке K. Известно, что $BC = 2, KC = 1$, $BK = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Найти площадь треугольника ABC.

30. (ИСАА-98.4) В треугольнике ABC известны стороны: $BC = AC = 12$, $AB = 6$; AD-биссектриса. Найти радиус R окружности, описанной около треугольника ADC. Выяснить, что больше: R или 6,5.

31. (почв-97.5) В треугольнике ABC угол C равен $60°$, а биссектриса угла C равна $5\sqrt{3}$. Найти тангенс угла A и сторону BC, если известно, что $|AC| : |BC| = 5 : 2$.

32. (физфак-96.7) Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC ($|AB| = |BC|$) делит сторону BC на отрезки $|BD| = b, |DC| = c$. Найти биссектрису AD.

33. (геогр-95.4) В треугольнике ABC со сторонами $BC = 7$, $AC = 5$, $AB = 3$ проведена биссектриса AD. Вокруг треугольника ABD описана окружность, а в треугольник ACD вписана окружность. Найти произведение их радиусов.

34. (физфак-90.4) В треугольнике ABC $\widehat{BAC} = \alpha, \widehat{ABC} = \beta$, $BC = a$, AD - высота. На стороне AB взята точка P так, что $AP : PB =$

1 : 2. Через точку P проведена окружность, касающаяся стороны BC в точке D. Найдите радиус этой окружности.

35. (мехмат-96.3) Треугольник ABC со стороной $|AB| = 4$ и углом $\angle A = 60°$ вписан в окружность радиуса $2\sqrt{3}$. Найти среднюю линию этого треугольника, параллельную AC, и расстояние между точками, в которых ее продолжение пересекает окружность.

36. (почв-97.5) Известно, что расстояние от центра описанной окружности до стороны AB треугольника ABC равняется половине радиуса этой окружности. Найти высоту треугольника ABC, опущенную на сторону AB, если она (высота) меньше $\sqrt{\frac{3}{2}}$, а две другие стороны равны 2 и 3.

37. (геогр-94.5) В треугольнике KMN проведены высота NA, биссектриса NB и медиана NC, которые делят угол KNM на четыре равные части. Найти высоту NA, биссектрису NB и медиану NC, если радиус описанной около треугольника KMN окружности равен R.

38. (биофак-88.4) Треугольник ABC вписан в окружность радиуса $\sqrt{3} - 1$. $\widehat{BAC} = 60°$, а радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, равен 1. Найти углы ABC и ACB данного треугольника.

39. (геогр-96.4) Углы тупоугольного треугольника ABC удовлетворяют равенству $\sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$. Найти периметр этого треугольника, если радиус описанной окружности равен R, а один из углов равен $\frac{\pi}{8}$.

40. (ВМиК-83.4) Угол при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{\pi}{6}$. Построен круг радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$ с центром в вершине этого треугольника, противолежащей основанию. Определить отношение площади общей части треугольника и круга к площади треугольника, если длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна $\sqrt{7}$.

41. (ВМиК-97.5) Внутри треугольника ABC выбрана точка O так, что $\sin\widehat{BOC} = \frac{1}{4}$, $\sin\widehat{AOC} = \frac{1}{3}$. Известно, что $BO = 2$, $BC = 3$,

$AC = 4$. Найти расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOC и BOC.

42. (ВМиК-93.4) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точка D делит сторону BC в отношении 2:1, считая от вершины B, а точка E - середина стороны AB. Известно, что медиана CQ треугольника CED равна $\frac{\sqrt{23}}{2}$ и $|DE| = \frac{\sqrt{23}}{2}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

43. (геол-98(1).5) Среди треугольников KLM, у которых радиус описанной окружности равен 10, сторона KL равна 16, высота MH равна $\frac{39}{10}$, найти угол KML того треугольника, медиана MN которого наименьшая.

§3. Подобие.

В этом параграфе собраны задачи, при решении которых использование подобия играет решающую роль. Два треугольника *называются подобными*, если у них равны все три угла, а соответствующие стороны пропорциональны.

Для решения задач на подобие необходимо знать три признака подобия:

1. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.

2. Если один угол первого треугольника равен углу второго треугольника, а прилежащие к этим углам стороны треугольников пропорциональны, то треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то треугольники подобны.

Сформулирем утверждение, которое значительно упрощает решение некоторых задач этого параграфа:

Теорема 2. Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Тогда треугольники A_1BC_1 и ABC подобны с коэффициентом подобия $|\cos\hat{B}|$.

Докажите самостоятельно это утверждение.

При решении задач этого параграфа, а также задач на площади(§6), будет полезна следующая теорема:

Теорема Менелая. Пусть прямая пересекает произвольный треугольник ABC, причем C_1 - точка ее пересечения со стороной AB, A_1 - точка ее пересечения со стороной BC, и B_1 - точка ее пересечения с продолжением стороны AC. Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Докажите эту теорему самостоятельно. При доказательстве надо через точку C провести прямую, параллельную стороне AB и найти две пары подобных треугольников.

Теорема Менелая не входит в школьную программу. Поэтому, если вы будете использовать ее на экзамене, то надо будет ее доказывать. И вообще, ЕСЛИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ИСПОЛЬЗУЕТСЯ УТВЕРЖДЕНИЕ, КОТОРОЕ НЕ ВХОДИТ В ПРОГРАММУ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ, ТО ЭТО УТВЕРЖДЕНИЕ НАДО ДОКАЗАТЬ.

1. (м/м-86.2) Окружность радиуса 1 касается окружности радиуса 3 в точке C. Прямая, проходящая через точку C, пересекает окружность меньшего радиуса в точке A, а большего радиуса в точке B. Найти длину отрезка AC, если $|AB| = 2\sqrt{5}$.

2. (физ-91.4) В треугольнике ABC угол C - тупой, D - точка пересечения прямой DB, перпендикулярной к AB, и прямой DC, перпендикулярной к AC. Высота треугольника ADC, проведенная из вершины C, пересекает AB в точке M. Известно, что $AM = a$, $MB = b$. Найдите AC.

3. (ВМиК-80.3) В прямоугольном треугольнике ABC из вершины B прямого угла опущена высота BD на гипотенузу AC. Известно, что $|AB| = 13$, $|BD| = 12$. Найти площадь треугольника ABC.

4. (экон-79.2) В треугольнике ABC высота BD равна 11.2, а высота AE равна 12. Точка E лежит на стороне BC и $|BE| : |EC| = 5 : 9$. Найти длину стороны AC.

5. (почв-82.4) В равнобедренный треугольник $ABC(|AB| = |BC|)$ вписана окружность радиуса 3. Прямая p касается этой окружности и параллельна прямой AC, но не совпадает с ней. Расстояние от точки B до прямой p равно 3. Найти расстояние между точками, в которых данная окружность касается сторон AB и BC.

6. (геогр-78.3) В прямоугольном треугольнике ABC расположен прямоугольник $EKMP$ так, что сторона EK лежит на гипотенузе BC, а вершины M и P - на катетах AC и AB соответственно. $|AC| = 3, |AB| = 4$. Найти длины сторон прямоугольника $EKMP$, если его площадь равна $\frac{5}{3}$, а периметр меньше 9.

7. (ИСАА-94.3) Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, касается катетов AC и BC соответственно в точках E и D. Найти угол ABC, если известно, что $AE = 1, BD = 3$.

8. (геогр-87.3) Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность радиуса $2\sqrt{5}$, отсекающая от прямой BC отрезок $4\sqrt{5}$ и касающаяся прямой AC в точке A. Из точки B проведен перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F. Найти площадь треугольника ABC, если $|BF| = 2$.

9. (филолог-81.3) В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 6, а высота, проведенная к основанию AD, равна 3. Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M так, что $MC = 4$. N - точка пересечения биссектрисы AM и диагонали BD. Вычислить площадь треугольника BNM.

10. (геол-95.6) Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника в точке пересечения с высотой, опущенной на гипотенузу, делится на отрезки, отношение длин которых равно $1+\sqrt{2}$, считая от вершины. Найти острые углы треугольника.

11. (психфак-93.4) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CC_1 и AA_1. Известно, что $|AC| = 1$ и $\widehat{C_1CA_1} = \alpha$. Найти площадь круга, описанного около треугольника C_1BA_1.

12. (ВМиК-94.4) В остроугольном треугольнике ABC на высоте AD взята точка M, а на высоте BP - точка N так, что углы BMC

и ANC– прямые. Известно, что $|MN| = 4 + 2\sqrt{3}, \widehat{MCN} = 30°$. Найти биссектрису CL треугольника CMN.

13. (экон-93.6) Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найти площадь треугольника.

14. (м/м-78.3) В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

15. (экон-88.5) В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что $AD = 3, \cos\widehat{BDC} = \dfrac{13}{20}, \widehat{ABC} + \widehat{ADB} = \pi$. Найти периметр треугольника ABC, если $BC = 2$.

16. (филолог-87.4) Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O. Точки O, M, E, C лежат на одной окружности. Найти AB, если $|BE| = |AM| = 3$.

17. (физ-97.6) На сторонах острого угла с вершиной O взяты точки A и B. На луче OB взята точка M на расстоянии $3 \cdot |OA|$ от прямой OA, а на луче OA - точка N на расстоянии $3 \cdot |OB|$ от прямой OB. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 3. Найти MN.

18. (мехмат-95.5) На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки D, E и F соответственно. Отрезки AE и DF проходят через центр вписанной в треугольник окружности, а прямые DF и BC параллельны. Найти длину отрезка BE и периметр треугольника ABC, если $|BC| = 15, |BD| = 6, |CF| = 4$.

19. (экон.К-87.5) В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что $|AK| : |KB| = 2 : 3$, $|AM| : |MC| = 4 : 5$. Найти отношение, в котором точка пересечения прямых KC и BM делит отрезок BM.

20. (физ-97.6) На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне PR - точка L, причем $|NQ| = |LR|$. Точка пересечения отрезков QL и NR делит отрезок QL в отношении $m : n$, считая от точки Q. Найти отношение $|PN| : |PR|$.

21. (экон.К-85.3) В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что $|AP| < |AQ|$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $|PQ| = 3$. Найти длину стороны AC.

22. (экон-87.5) В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что $|AK| : |KB| = 3 : 2$, $|AM| : |MC| = 4 : 5$. Найти отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне BC, делит отрезок BM.

23. (почв-86.5) В треугольнике ABC точка D делит сторону AB пополам, а точка E лежит на стороне BC, причем $|BC| = 3|BE|$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке O. Найти длину стороны AB, если $|AE| = 5$, $|OC| = 4$, $\widehat{AOC} = 120°$.

24. (геогр-82.3) В треугольнике ABC длина высоты BD равна 6, длина медианы CE равна 5, расстояние от точки пересечения отрезков BD и CE до стороны AC равно 1. Найти длину стороны AB.

§4. Углы в окружностях.

В этом параграфе собраны задачи, в которых главную роль играют различные углы в окружностях: центральные, вписанные, углы между хордами, между хордой и касательной, между касательной и секущей, между секущими.

Центральный угол равен по величине мере дуги окружности, на которую он опирается: $\smile AmB = \widehat{BOA} = 2\alpha$ (см. рис. 1).

Вписанный угол, т.е. угол образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности, равен по величине половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности:
$\widehat{BDA} = \alpha = \dfrac{1}{2}\widehat{BOA} = \dfrac{1}{2} \smile AmB$ (см. рис. 1).

Угол между хордами равен по величине полусумме мер дуг окружности, которые отсекают на окружности эти хорды:
$\delta = \dfrac{1}{2}(\smile AmB + \smile DnE) = \alpha + \beta$ (см. рис. 1).

Угол между секущими, выходящими из одной точки, равен полуразности мер дуг окружности, заключенных между ними:
$\gamma = \frac{1}{2}(\smile AmB - \smile DnE) = \alpha - \beta$ (см. рис. 1).

Угол между хордой и касательной измеряется половиной меры заключенной внутри него дуги окружности:
$\widehat{DCA} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = \widehat{ABC}$ (см. рис. 2).

Приведем ряд полезных следствий вышеприведенных утверждений:

- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу (или на равные дуги) равны: $\widehat{BDA} = \widehat{BEA} = \alpha$ (см. рис. 1).
- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду (или на равные хорды) равны.
- Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым.
- Если вписанный угол является прямым, то он опирается на диаметр окружности.

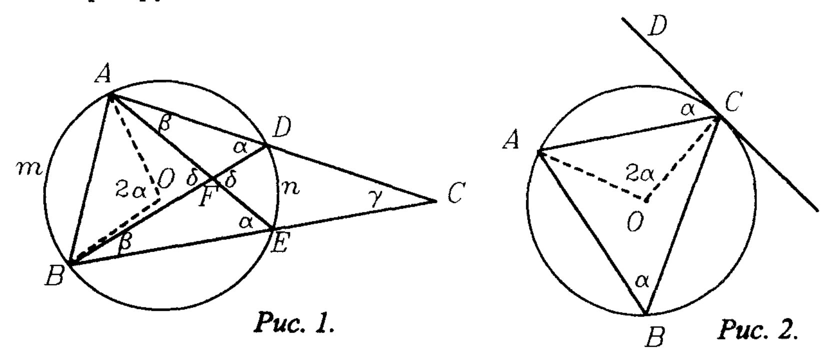


Рис. 1. *Рис. 2.*

1. (геогр-79.3) В треугольнике ABC известно, что $AB = 6$, $AB = BC$. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в точке D так, что $BD : DC = 2 : 1$. Найти длину стороны AC.

2. (геол-95.7) Около треугольника ABC описана окружность. Продолжение биссектрисы CK треугольника ABC пересекает эту ок-

ружность в точке L, причем CL - диаметр данной окружности. Найти отношение длин отрезков BL и AC, если $\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{4}$.

3. (геогр-83.3) На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K. Найти площадь треугольника CKB, если $|AC| = b, \widehat{ABC} = \beta$.

4. (м/м-96.3) В треугольнике ABC точка O - центр описанной окружности, точка L лежит на отрезке AB и $AL = LB$. Описанная около треугольника ALO окружность пересекает AC в точке K. Найти площадь треугольника ABC, если $\widehat{LOA} = 45°, LK = 8, AK = 7$.

5. (почв-88.2) Диаметр AB окружности продолжили за точку B и на продолжении отметили точку C. Из точки C провели секущую под углом $7°$, пересекающую окружность в точках D и E, считая от точки C. Известно, что $DC = 3, \widehat{DAC} = 30°$. Найти диаметр окружности.

6. (психфак-83.4) В окружность радиуса 7 вписан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Длины сторон AB и BC равны. Площадь треугольника ABD относится к площади треугольника BCD как 2:1, а $\widehat{ADC} = 120°$. Найти длины всех сторон четырехугольника $ABCD$.

7. (почв-96.5) В треугольнике ABC $AB = 3, AC = 3\sqrt{7}$, $\widehat{ABC} = 60°$. Биссектриса угла ABC продолжена до пересечения в точке D с окружностью, описанной вокруг треугольника. Найти длину отрезка BD.

8. (почв-84.4) В треугольнике ABC $\widehat{BAC} = 75°$, $|AB| = c, |AC| = b$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\widehat{BAM} = 30°$. Продолжение прямой AM пересекает окружность, описанную вокруг треугольника, в точке N. Найти длину отрезка AN.

9. (психфак-78.2) Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислить длину диагонали AC, если $|BD| = 2, |AB| = 1$, $\widehat{ABD} : \widehat{DBC} = 4 : 3$.

10. (экон.К-84.4) В треугольнике ABC длина стороны BC равна 4, а длина стороны AB равна $2\sqrt{19}$. Известно, что центр окружности проведенной через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найти длину стороны AC.

11. (м/м-91.4) Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD. Из точки D радиусом, равным AD, описана окружность, пересекающая стороны треугольника AB и AC в точках M и N соответственно. Вычислите длину стороны AC, если заданы длины отрезков $|AB| = c$, $|AM| = n$, $|AN| = m$.

12. (почв-85.4) Продолжение медианы треугольника ABC, проведенной из вершины A, пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D. Найти длину отрезка BC, если $|AC| = |DC| = 1$.

13. (геол.ОГ-81.5) Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найти длину отрезка KC, если $|AK| = 6, |BC| = 4$.

14. (м/м-97.4) В окружности проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке E, причем касательная к окружности, проходящая через точку B параллельна AC. Известно, что $EA : DA = 3 : 4$, $S_{\triangle DCB} = 16$. Найти площадь треугольника BCE.

15. (ИСАА-95.4) Сторона AB треугольника ABC равна 3, $|BC| = 2 \cdot |AC|$, E - точка пересечения продолжения биссектрисы CD данного треугольника с описанной около него окружностью, $|DE| = 1$. Найти сторону AC.

16. (экон.К-86.4) В окружность радиуса $2\sqrt{7}$ вписана трапеция $ABCD$, причем её основание AD является диаметром, а $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$. Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P, такой, что $|AP| : |PD| = 1 : 3$. Найти площадь треугольника BPE.

17. (экон-97.3) Касательная, проведенная через вершину C вписанного в окружность треугольника ABC, пересекает продолжение стороны AB за вершину B в точке D. Известно, что радиус окружности равен 2, $|AC| = \sqrt{12}$ и $\widehat{CDA} + \widehat{ACB} = 2 \cdot \widehat{BAC}$. Найти секущую AD.

18. (физ-95.8) В окружности проведены диаметр MN и параллельная ему хорда AB. Касательная к окружности в точке M пересекает прямые NA и NB соответственно в точках P и Q. Известно, что $|MP| = p, |MQ| = q$. Найти диаметр MN.

19. (био-97.5) В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, соединяющая стороны AB и BC. Окружность, проведенная через точки M, N и C, касается стороны AB, а ее радиус равен $\sqrt{2}$. Найти синус угла ACB, если $|AC| = 2$.

20. (почв-94.5) Через точку C проведены две прямые, касающиеся заданной окружности в точках A и B. На большей из дуг AB взята точка D, для которой $|CD| = 2$ и $\sin \widehat{ACD} \cdot \sin \widehat{BCD} = \frac{1}{3}$. Найти расстояние от точки D до хорды AB.

21. (экон-90.3) Окружность с центром в точке O, лежащей на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC, касается его катетов AB и BC. Найти длину AC, если известно, что $|AM| = \frac{20}{9}$, $|AN| : |MN| = 6 : 1$, где $M-$ точка касания AB с окружностью, а $N-$ точка пересечения окружности с AC, расположенная между точками A и O.

22. (м/м-97.4) В треугольнике ABC $|AB| = 3, \widehat{ACB} = \arcsin \frac{3}{5}$. Хорда KN окружности, описанной около треугольника ABC пересекает отрезки AC и BC в точках M и L соответственно. Известно, что $\widehat{ABC} = \widehat{CML}$, площадь четырехугольника $ABLM$ равна 2, $|LM| = 1$. Найти высоту треугольника KNC, опущенную из вершины C, и его площадь.

23. (геол-91.5) Четыре точки окружности следуют в порядке A, B, C, D. Продолжения хорды AB за точку B и хорды CD за точку C пересекаются в точке E, причем $\widehat{AED} = 60°$. Угол ABD в три раза больше угла BAC. Докажите, что AD - диаметр окружности.

24. (ВМиК-97.4) В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC, прямая AD пересекается с биссектрисой угла ACB в точке O. Известно, что точки C, D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне $AC, |AC| : |AB| = 3 : 2$, а величина угла DAC в три раза больше величины угла DAB. Найти косинус угла ACB.

25. (био-95.5) Вершины B, C, D четырехугольника $ABCD$ расположены на окружности с центром O, которая пересекает сторону AB в точке F, а сторону AD - в точке E. Известно, что угол BAD прямой, хорда EF равна хорде FB и хорды BC, CD, ED равны между собой. Найти угол ABO.

26. (геол-93.5) На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол $15°$. Найти углы треугольника ABC.

27. (физ-94.6) В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $|AD| = m, |BC| = n$. Найти диаметр окружности.

28. (геогр-95.4) Вокруг четырехугольника $ABCD$ с взаимно перпендикулярными диагоналями описана окружность радиуса 2. Найти сторону CD, если $|AB| = 3$.

29. (почв-81.4) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Радиус AO перпендикулярен радиусу OB, а радиус OC перпендикулярен радиусу OD. Длина перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AD, равна 9. $|AD| = 2|BC|$. Найти площадь треугольника AOB.

30. (ВМиК-92.5) Две окружности пересекаются в точках A и K. Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK. Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB, касается одной окружности в точке A. Прямая, содержащая отрезок AC, касается другой окружности также в точке A. Найти площадь треугольника ABC, если $|BK| = 1$, $|CK| = 4$, $\operatorname{tg}\widehat{CAB} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

§5. Другие задачи на окружности.

В начале §5 идут задачи на использование общих свойств окружностей: расположение центров вписанной и описанной окружностей, формулы площадей сектора, сегмента круга и т.д. Во второй половине §5 собраны задачи на использование различных соотношений между хордами, касательными и секущими.

Приведем некоторые формулы и утверждения:

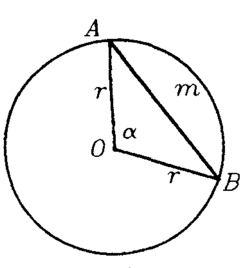
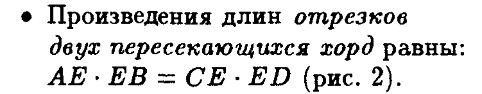


Рис. 1.

- *Площадь круга* радиуса r равна πr^2.
- *Площадь сектора* величины α круга радиуса r: $S_{OAmB} = \frac{1}{2}\alpha r^2$ (рис. 1).
- *Площадь сегмента* величины α круга радиуса r: $S_{AmB} = \frac{1}{2}r^2 \cdot (\alpha - \sin\alpha)$ (рис. 1).



- Произведения длин *отрезков двух пересекающихся хорд* равны: $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ (рис. 2).
- *Отрезки касательных к окружности*, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности: $AB = AC$, $\widehat{BAO} = \widehat{CAO} = \alpha$ (рис. 3).
- В любом *описанном около окружности четырехугольнике* суммы длин противоположных сторон равны.
- Квадрат длины отрезка *касательной* равен произведению длины отрезка *секущей* на длину ее внешней части: $AB^2 = AC \cdot AD$ (рис. 4).
- Произведение длины отрезка *секущей* на длину ее внешней части есть величина постоянная для всех секущих, проведенных из одной точки: $AC \cdot AD = AE \cdot AF$ (рис. 4).

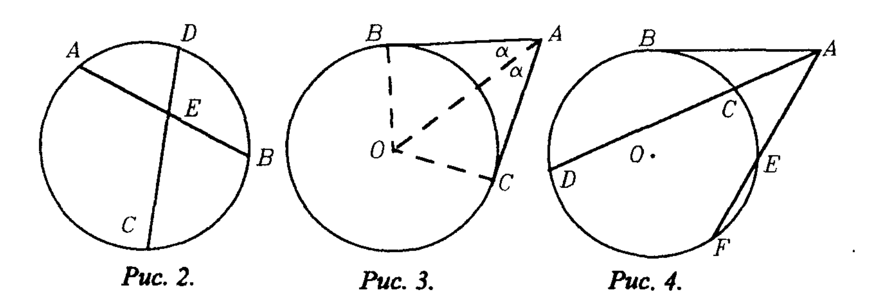


Рис. 2. Рис. 3. Рис. 4.

1. (геол.ОГ-80.2) Найти периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, если известно, что хорда длиной 2 этой окружности удалена от ее центра на 3.

2. (филолог-89.4) В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причем угол CDA равен $\frac{2\pi}{3}$. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AD, DC и дуги AC, если $OC = 2$, $OD = \sqrt{3}$.

3. (ИСАА-93.3) На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D. Найти расстояние от вершины A до центра окружности, если $AD = \sqrt{3}$ и $\widehat{ABC} = 120°$.

4. (био-92.3) Дана окружность, диаметр MN которой равен 16. На касательной к этой окружности в точке M отложен отрезок MP, длина которого больше 15. Из точки P проведена вторая касательная к окружности, пересекающая прямую MN в точке Q. Найти площадь треугольника MPQ, если его периметр равен 72.

5. (хим-91.5) Две окружности разных радиусов касаются в точке A одной и той же прямой и расположены по разные стороны от нее. Отрезок AB - диаметр меньшей окружности. Из точки B проведены две прямые, касающиеся большей окружности в точках M и N. Прямая, проходящая через точки M и A, пересекает меньшую окружность в точке K. Известно, что $MK = \sqrt{2+\sqrt{3}}, \widehat{BMA} = 15°$. Найдите площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных BM, BN и той дугой MN большей окружности, которая не содержит точку A.

6. (почв-95.4) Две окружности, радиусы которых относятся как $(9-4\sqrt{3}) : 1$, Касаются друг друга внутренним образом. Проведены две равные хорды большей окружности, касающиеся меньшей окружности. Одна из этих хорд перпендикулярна отрезку, соединяющему центры окружностей, а другая нет. Найти угол между этими хордами.

7. (психфак-84.4) Две окружности радиусов 8 и 6 пересекаются в точках A и B. Через центры O_1 и O_2 окружностей проведена прямая; C_1 и C_2 - две из четырех точек пересечения этой прямой с окружностями, причем точка C_1 лежит на окружности с центром O_1, а

длина отрезка C_1C_2 больше 20. Найти расстояние между точками O_1 и O_2, если произведение площадей треугольников C_1O_1A и C_2O_2B равно 336.

. (геогр-97.2) В некоторую окружность вписаны две касающиеся между собой внешним образом окружности с радиусами r и R $(r < R)$, которые внутренним образом касаются первой окружности. Периметр равнобедренного треугольника с вершинами в центрах окружностей равен $2p$. Выразить длину боковой стороны через p и один из данных радиусов, если угол при основании этого треугольника больше $70°$.

. (м/м-93.4) Две окружности с центрами A и B и радиусами соответственно 2 и 1 касаются друг друга. Точка C лежит на прямой, касающейся каждой из окружностей, и находится на расстоянии $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ от середины отрезка AB. Найти площадь S треугольника ABC, если известно, что $S > 2$.

. (ВМиК-91.4) Три круга с центрами в точках P, Q и R попарно касаются друг друга внешним образом в точках A, B и C. Известно, что$\widehat{PQR} = 2\arcsin\dfrac{1}{3}$, а сумма радиусов всех трех кругов равна $12\sqrt{2}$. Какую наибольшую длину может иметь окружность, проходящая через точки A, B, C.

. (почв-90.3) В треугольнике ABC $AB = 4, \widehat{BAC} = 30°, \widehat{ABC} = 130°$. На стороне AB как на диаметре построена окружность. Найдите площадь части круга, лежащей внутри треугольника.

. (м/м-94.3) В круге радиуса 1 проведены хорды $AB = \sqrt{2}$ и $BC = \dfrac{10}{7}$. Найти площадь части круга, лежащей внутри угла ABC, если угол BAC острый.

. (почв-80.3) Хорды AB и AC имеют одинаковую длину. Величина образованного ими вписанного в окружность угла равна $\dfrac{\pi}{6}$. Найти отношение площади той части круга, которая заключена в этом угле, к площади всего круга.

. (физ-92.6) Радиус окружности, описанной около треугольника KLM, равен R. Через вершину L проведена прямая, перпендикулярная

стороне KM. Эту прямую пересекают в точках A и B серединные перпендикуляры к сторонам KL и LM. Известно, что $|AL| = a$. Найти $|BL|$.

15. (хим-98(1).5) В окружности проведены хорды KL, MN, PS. Хорды KL, PS пересекаются в точке C, хорды KL, MN пересекаются в точке A, а хорды MN, PS пересекаются в точке B, причем $AL = CK$, $AM = BN$, $BS = 5$, $BC = 4$. Найти радиус окружности, если величина угла BAC равна $\pi/4$.

16. (физ-96.4) Окружности с центрами O_1 и O_2 имеют общую хорду AB, $\widehat{AO_1B} = 60°$. Отношение длины первой окружности к длине второй окружности равно $\sqrt{2}$. Найти угол AO_2B.

17. (био-90.4) Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1$, $MP = 6, MQ = 2$. При этом углы NMP и PMQ равны. Найдите радиус окружности.

18. (физ-96.4) Касательная к окружности (K– точка касания) параллельна хорде LM. Известно, что $|LM| = 6, |KM| = 5$. Найти радиус окружности.

19. (физ-96.6) В окружности радиуса R проведены хорда AB и диаметр AC. Хорда PQ, перпендикулярная диаметру AC, пересекает хорду AB в точке M. Известно, что $|AB| = a, |PM| : |MQ| = 3$. Найти длину отрезка AM.

20. (хим-98(2).5) Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются в точке E, причем $CE = DE$. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке K. Отрезки AK и CE пересекаются в точке M. Найти площадь треугольника CKM, если $AB = 10, AE = 1$.

21. (экон.К-80.2) В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36, вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания в отношении 2:3. Найти длины сторон треугольника.

22. (почв-87.4) Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A. Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку A, пересекается с другой их общей касательной в точке B. Найти радиус второй окружности, если $AB = 4$.

23. (м/м-83.3) В треугольнике ABC с периметром $2p$ длина стороны AC равна a и величина острого угла ABC равна α. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найти площадь треугольника BOK.

24. (био-78.3) Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности. Величина угла OAK равна $\frac{\pi}{3}$. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

25. (псих-98.5) В треугольнике ABC длина биссектрисы AL равна l, в $\triangle ABL$ вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке $K, BK = b$. На сторонах AB и BC в $\triangle ABC$ выбраны точки M и N, соответственно, так, что прямая MN проходит через центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, причем $MB + BN = c$. Найти отношение площадей треугольников ABL и MBN.

26. (ВМиК-90.5) Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\frac{\sqrt{15}}{3}$. Окружность радиусом $\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ касается лучей, образующих угол ACB, и вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите $\operatorname{tg}\widehat{ABC}$, если площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{15}$, а наибольшей из его сторон является сторона AC.

27. (экон.В-98.5) Две окружности радиусов 4 и 3 касаются друг друга внешним образом. К этим окружностям проведены общие касательные PQ и RS таким образом, что точки P и S принадлежат окружности большего радиуса, а точки Q и R принадлежат окружности меньшего радиуса. Найти радиус окружности, касающейся отрезков RS, SP и PQ.

28. (психфак-86.5) В треугольник ABC вписана окружность. Касательная к этой окружности, параллельная стороне BC, пересекает сторону AB в точке D и сторону AC в точке E. Периметры треугольников ABC и ADE равны соответственно 40 и 30, $\widehat{ABC} = \alpha$. Найти радиус окружности.

29. (м/м-98(3).4) Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается основания AC в точке D и боковой стороны AB

в точке E. Точка F - середина стороны AB, а точка G - точка пересечения окружности и отрезка FD, отличная от D. Касательная к окружности, проходящая через точку G, пересекает сторону AB в точке H. Найти угол BCA, если известно, что $FH : HE = 2 : 3$.

30. (геол.ОГ-82.5) В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC, AC соответственно в точках M, D, N. Определить длину отрезка MD, если известно, что $NA = 2, NC = 3, \widehat{BCA} = \frac{\pi}{3}$.

31. (психфак-96.4) В угол с вершиной A величиной $60°$ вписана окружность с центром в точке O. К этой окружности проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках B и C. Отрезок BC пересекается с отрезком AO в точке M. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $AM : MO = 2 : 3, BC = 7$.

32. (м/м-85.3) Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC соответственно в точках D и E. Найти длину высоты треугольника ABC, опущенной из точки A, если $|AB| = 5, |AC| = 2$, а точки A, D, E и C лежат на одной окружности.

33. (экон.М-96.5) Через точку A, находящуюся вне окружности на расстоянии 7 от ее центра, проведена прямая, пересекающая окружность в точках B и C. Найти радиус окружности, если известно, что $|AB| = 3, |BC| = 5$.

34. (хим-97.5) Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Их общая касательная касается первой окружности в точке B, а второй - в точке C. Прямая, проходящая через точки A и B, пересекает вторую окружность в точке D. Известно, что $|AB| = 5, |AD| = 4$. Найти $|CD|$.

35. (ВМиК-86.4) В окружности радиуса 4 проведены хорда AB и диаметр AK, образующий с хордой угол $\frac{\pi}{8}$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C. Найти длину медианы AM треугольника ABC.

36. (физ-80.5) О треугольнике ABC известно, что $\widehat{BAC} = \alpha, \widehat{BCA} = \beta, |AC| = b$. На стороне BC взята точка D так, что $|BD| = 3|DC|$. Через точки B и D проведена окружность, касающаяся стороны AC или её продолжения за точку A. Найти радиус этой окружности.

37. (физ-89.6) Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаются некоторой прямой в точках C и D; N - точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найти:
а) радиус окружности, описанной около треугольника ACD;
б) отношение высот треугольников NAC и NAD, опущенных из вершины N.

38. (м/м-79.2) Отрезок KL является диаметром некоторой окружности. Через его концы K и L проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках P и Q, лежащих по одну сторону от прямой KL. Найти радиус окружности, если угол PKL равен $\pi/3$ и точка пересечения прямых KP и QL находится от точек P и Q на расстоянии, равном 1.

39. (геогр-81.4) В треугольнике ABC на стороне AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону AB в точке M и сторону BC в точке N. Известно, что длина отрезка AB равна 3, длина отрезка AC равна 2 и что $AM : MB = 2 : 3$. Найти длину отрезка AN.

40. (экон-89.5) Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E. Найти величину угла CDB, если $AD = 5, AC = 2\sqrt{7}$, $BE = 4, BD : CE = 3 : 2$.

41. (ИСАА-96.5) Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает сторону AB в точке D, а сторону BC в точке E. Найти угол BDC, если $|BD| : |EC| = 1 : 2$, $|BE| : |AD| = 2 : 7, \widehat{ABC} = 60°$.

§6. Площади.

В этом параграфе собраны задачи на площади. Причем при решении практически всех задач этого параграфа полезно использовать леммы о площадях.

Лемма 1. Равные фигуры имеют одинаковые площади: если $F_1 = F_2$, то $S_{F_1} = S_{F_2}$.

Лемма 2. Если $F = F_1 \cup F_2$, причем $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, тогда $S_F = S_{F_1} + S_{F_2}$.

Лемма 3. Если C – общая вершина треугольников ABC и DEC, а стороны AB и DE лежат на одной прямой, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEC}} = \frac{AB}{DE}.$$

Рис. 1.

Лемма 4. Если треугольники ABC и DEF имеют равные стороны $AB = DE$, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{CH}{FG}.$$

Рис. 2.

Лемма 5. Если вершина A и противолежащая ей сторона BC треугольника ABC и вершина D и противолежащая ей сторона EF треугольника DEF лежат на двух параллельных прямых, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{BC}{EF}.$$

Рис. 3.

Лемма 6. Если треугольники ABC и ADE имеют общий (или одинаковый) угол A, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}.$$

Рис. 4.

Лемма 7. Если треугольники ABC и DEF подобны с коэффициентом подобия k, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = k^2.$$

Для решения задач этого параграфа необходимо также помнить формулы площадей, приведенные в предыдущих параграфах.

1. (хим-93.3) В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, а точка E - на стороне AB. Известно, что $AD = DC, AE = 2 \cdot EB$. Найти отношение площадей треугольников BDE и ABC.

2. (хим-94.4) На стороне KM треугольника KLM, имеющего площадь 4, взята точка N так, что $|MN| = \frac{1}{4}|MK|$. Найти длину отрезка LN, если $\widehat{KLN} = 60^\circ, |KL| = 2\sqrt{3}$.

3. (геол-96.7) В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD перпендикулярна основаниям и равна 9, $|CD| = 12$, а отрезок AO, где O - точка пересечения диагоналей трапеции, равен 6. Найти площадь треугольника BOC.

4. (геогр-90.4) На сторонах AB, BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K, M и L таким образом, что $|AK| : |KB| = 2 : 1$, $|BM| : |MC| = 1 : 1, |AL| : |LD| = 1 : 3$. Найдите отношение площадей треугольников KBL и BML.

5. (физ-87.5) Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол B - прямой) взята точка D так, что площади треугольников ABD и

BCD соответсвенно в три и в четыре раза меньше площади треугольника ABC. Длины отрезков AD и DC равны соответственно a и c. Найти длину отрезка BD.

6. (геол-97.4) В треугольнике FGH угол G прямой, $FG = 8, GH = 2$. Точка D лежит на стороне FH, A и B - точки пересечения медиан, соответственно в треугольниках FGD и DGH. Найти площадь треугольника GAB.

7. (ВМиК-95.3) В треугольнике ABC медианы AM и CL перпендикулярны, $|BC| = a, |AC| = b$. Найти площадь треугольника ABM.

8. (филолог-85.4) В треугольнике ABC длина высоты BD равна 3, длина медианы BM равна 5. На стороне BC взята точка Q так, что $|BQ| = 1, |QC| = 5$. Найти площадь S треугольника AQC, если известно, что $S > 3$.

9. (хим-94.4) Прямоугольные треугольники ABC и ABD имеют общую гипотенузу $|AB| = 5$. Точки C и D расположены по разные стороны от прямой, проходящей через точки A и $B, |BC| = |BD| = 3$. Точка E лежит на $AC, |EC| = 1$. Точка F лежит на $AD, |FD| = 2$. Найти площадь пятиугольника $ECBDF$.

10. (геогр-92.4) В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Известно, что площадь треугольника DEF равна 5. Найти площадь треугольника ABC.

11. (психфак-82.4) В ромбе $ABCD$, где $\widehat{BAD} = 60°$, перпендикуляр к стороне AD, восставленный из середины AD, пересекает диагональ AC в точке M, а перпендикуляр к стороне CD, восставленный из середины CD, пересекает диагональ AC в точке N. Найти отношение площади треугольника MND к площади ромба $ABCD$.

12. (почв-77.4) Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. $|AC| = a$, $|BC| = b$. Найти площадь трапеции.

13. (био-81.3) Центр O окружности радиуса 3 лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC. Катеты треугольника касаются окружности. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что $|OC| = 5$.

14. (геогр-91.4) В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка E, где расстояние AE составляет треть длины AC, а на стороне AD взята точка F, где расстояние AF составляет четверть длины AD. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что площадь четырехугольника $ABGE$, где G - точка пересечения прямой FE со стороной BC, равна 8.

15. (м/м-98(1).4) Точка F лежит на продолжении стороны BC параллелограмма $ABCD$ за точку C. Отрезок AF пересекает диагональ BD в точке E и сторону CD в точке G. Известно, что отрезок AE на 1 длиннее отрезка EG, а отрезок GF равен 3. Какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь треугольника AED?

16. (био-83.4) Площадь трапеции $ABCD$ равна 6. Пусть E - точка пересечения продолжения боковых сторон этой трапеции. Через точку E и точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, которая пересекает меньшее основание BC в точке P, а большее основание AD в точке Q. Точка F лежит на отрезке EC, причем $|EF| : |FC| = |EP| : |EQ| = 1 : 3$. Найти площадь треугольника EPF.

17. (экон.К-79.2) В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 8$ и $BC = 4$. На продолжении стороны BC выбрана такая точка M, что прямая AM отсекает от трапеции треугольник, площадь которого в 4 раза меньше площади трапеции. Найти длину отрезка CM.

18. (хим-96.4) В треугольнике ABC точка D лежит на AC, причем $|AD| = 2 \cdot |DC|$. Точка E лежит на BC. Площадь треугольника ABD равна 3, а площадь треугольника AED равна 1. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O. Найти отношение площадей треугольников ABO и OED.

19. (психфак-81.2) На плоскости лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, у которого катеты имеют длину a. Поворотом в этой плоскости данного треугольника вокруг вершины его прямого угла на угол 45° получается другой равнобедренный прямоугольный треугольник. Найти площадь четырехугольника, являющегося общей частью этих двух треугольников.

20. (физ-97.4) Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке M, а сторону AC - в точке N. Площадь треугольника MCN в два раза больше площади трапеции $ABMN$. Найти $|CM| : |MB|$.

21. (физ-95.6) В трапеции $ABCD$ $(BC \| AD)$ диагонали пересекаются в точке $M, |BC| = a, |AD| = b$. Найти отношение площади треугольника ABM к площади трапеции $ABCD$.

22. (ВМиК-78.3) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB угол B равен $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$. Окружность радиуса 1, вписанная в угол C, касается стороны BC в точке M и отсекает от основания отрезок KE. Найти площадь треугольника KMB, если известно, что $MB = \frac{15}{8}$ и что точки A, K, E, B следуют на основании AB в указанном порядке.

23. (психфак-90.4) В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, сумма длин диагоналей AC и BD равна 36, а $\widehat{CAD} = 60°$. Отношение площадей треугольников AOD и BOC, где O - точка пересечения диагоналей, равно 4. Найдите площадь трапеции.

24. (геол-78.4) В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $|AK| : |BK| = 1 : 2$, а на стороне BC взята точка L так, что $|CL| : |BL| = 2 : 1$. Пусть Q - точка пересечения прямых AL и CK. Найти площадь треугольника ABC, если дано, что площадь треугольника BQC равна 1.

25. (био-82.5) Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC так, что $|BP| : |PQ| : |QC| = 1 : 2 : 3$. Точка R делит сторону AC этого треугольника так, что $|AR| : |RC| = 1 : 2$. Чему равно отношение площади четырехугольника $PQST$ к площади треугольника ABC, если S и T - точки пересечения прямой BR с прямыми AQ и AP соответственно?

26. (хим-86.4) На стороне AB треугольника ABC взята точка E, а на стороне BC - точка D так, что $|AE| = 2, |CD| = 1$. Прямые AD и CE пересекаются в точке O. Найти площадь четырехугольника $BDOE$, если $|AB| = |BC| = 8, |AC| = 6$.

27. (био-87.4) Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P - середина боковой стороны AB. Точка R на боковой стороне CD выбрана

так, что $2|CD| = 3|RD|$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q. Найти площадь треугольника APQ, если $|AD| = 2|BC|$.

28. (био-91.4) Высота трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований AD и BC равны соответственно 8 и 6. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая делит диагональ AC в точке O в отношении $|AO| : |OC| = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника OEC.

29. (психфак-88.5) В треугольнике ABC на сторонах AB и AC выбраны соответственно точки B_1 и C_1 так, что $|AB_1| : |AB| = 1 : 3$ и $|AC_1| : |AC| = 1 : 2$. Через точки A, B_1 и C_1 проведена окружность. Через точку B_1 проведена прямая, пересекающая отрезок AC_1 в точке D, а окружность - в точке E. Найти площадь треугольника B_1C_1E, если $|AC_1| = 4, |AD| = 1$, $|DE| = 2$, а площадь треугольника ABC равна 12.

30. (геогр-93.4) В треугольник со сторонами $AB = 4, BC = 2$, $AC = 3$ вписана окружность. Найти площадь треугольника AMN, где M, N - точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.

31. (хим-80.4) В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, которая касается боковой стороны AB в точке M. Через точку M проведен перпендикуляр ML к стороне AC треугольника ABC (точка L - основание этого перпендикуляра). Найти величину угла BCA, если известно, что площадь треугольника ABC равна 1, а площадь четырехугольника $LMBC$ равна S.

32. (геогр-97.5) В некоторый угол B вписаны две непересекающиеся окружности. Окружность большего радиуса касается сторон этого угла в точках A и C, а окружность меньшего радиуса - в точках A_1 и C_1. (Точки A и C_1 лежат на разных сторонах угла B). Прямая AC_1 пересекает окружности большего и меньшего радиусов в точках E и F, соответственно. Найти отношение площадей треугольников ABC_1 и A_1BC_1, если $|A_1B| = 2, |EF| = 1$, а длина AE равна среднему арифметическому длин BC_1 и EF.

33. (психфак-97.5) Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Через точку B на их общей касательной AB проведены две прямые, одна из которых пересекает первую окружность в точках N и M, а другая вторую окружность в точках P и

Q. Известно, что $|AB| = 6, |BM| = 9, |BP| = 5$. Найти отношение площадей треугольников MNO и PQO, где O - точка пересечения прямых MP и NQ.

34. (м/м-96.3) Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в 7 раз меньше площади четырехугольника $ABDE$. Найти DE и радиус окружности, если $|AB| = 4, \angle C = 45°$.

35. (экон-96.5) В треугольнике ABC со стороной $|AC| = 8$ проведена биссектриса BL. Известно, что площади треугольников ABL и BLC относятся как 3:1. Найти биссектрису BL, при которой высота, опущенная из вершины B на основание AC, будет наибольшей.

36. (био-85.4) На отрезке AB лежат точки C и D, причем точка C — между точками A и D. Точка M взята так, что перпендикулярны прямые AM и MD, а также перпендикулярны прямые CM и MB. Найти площадь треугольника CMD, если известно, что $\widehat{CMD} = \alpha$, $S_{AMD} = S_1$, $S_{CMB} = S_2$.

37. (м/м-87.3) Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 4, причем $|AC| = |BC|$. На прямой AB взята точка D, удаленная от прямых AC и BC на расстояния 11 и 3 соответственно. Найти $\cos\widehat{DBC}$.

38. (геол-77.4) В окружность с центром O вписан треугольник ABC ($\widehat{BAC} > \frac{\pi}{2}$). Продолжение биссектрисы AF угла A этого треугольника пересекает окружность в точке L, а радиус AO пересекает сторону BC в точке E. Пусть AH - высота треугольника ABC. Найти отношение площади треугольника OAL к площади четырехугольника $OEFL$, если известно, что $AL = 4\sqrt{2}$, $AH = \sqrt{2\sqrt{3}}$ и $\widehat{AEH} = \frac{\pi}{3}$.

39. (филолог-79.1) Даны две непересекающиеся окружности. К ним проведены две общие касательные, которые пересекаются в точке A отрезка, соединяющего центры окружностей. Радиус меньшей окружности равен R. Расстояние от точки A до центра окружности большего радиуса равно $6R$. Точка A делит длину отрезка касательной, заключенного между точками касания, в отношении 1:3.

Найти площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных и большими дугами окружностей, соединяющими точки касания.

40. (почв-92.4) Две окружности с центрами O_1 и O_2, лежащими на стороне MN треугольника MNP, касаются друг друга и пересекают стороны MP и PN в точках M, D и N, C соответственно, причем $|MO_1| = |O_1D| = 3, |NO_2| = |CO_2| = 6$. Найти площадь треугольника MNP, если известно, что отношение площади треугольника MCO_2 к площади треугольника O_1DN равно $\frac{8}{5}\sqrt{3}$ и $|PN| = |MP| \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

§7. Трапеции.

В этом параграфе собраны задачи, в которых участвует трапеция. Для успешного решения этих задач необходимо помнить все формулы и теоремы, которые вы изучили в прошлых параграфах.

Приведем некоторые факты, касающиеся только трапеций (см. рис. 1).

- *Площадь трапеции* $ABCD$ с основаниями AD и BC и высотой h равна
$$S = \frac{AD+BC}{2} \cdot h.$$

- Трапеция называется *равнобедренной,* если ее боковые стороны равны.

- Если $AC = BD$, то трапеция $ABCD$ – равнобедренная.

- *Около трапеции можно описать* окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.

- *В трапецию можно вписать* окружность тогда и только тогда, когда сумма длин оснований трапеции равняется сумме длин ее боковых сторон.

- Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника, два из которых подобны ($\triangle AOD \sim \triangle BOC$), а два других имеют одинаковую площадь ($S_{AOB} = S_{COD}$).

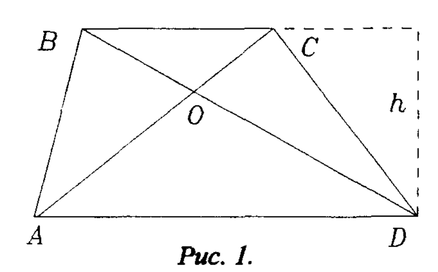


Рис. 1.

1. (био-77.2) В выпуклом четырехугольнике $MNLQ$ углы при вершинах N и L - прямые, а величина угла при вершине M равна $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. Найти длину дигонали NQ, если известно, что длина стороны LQ вдвое меньше длины стороны MN и на 2 больше длины стороны LN.

2. (экон-80.3) На плоскости даны две окружности радиусов 12 и 7 с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся некоторой прямой в точках M_1 и M_2 и лежащие по одну сторону от этой прямой. Известно, что $|M_1M_2| : |O_1O_2| = 2\sqrt{5} : 5$. Вычислить длину отрезка M_1M_2.

3. (филолог-83.4) В трапеции $ABCD$ основание AD больше основания BC. Известно, что $AD = CD = 4\frac{2}{3}, \widehat{BAD} = 90°, \widehat{BCD} = 150°$. На основании AD построен треугольник AED так, что точки B и E лежат по одну сторону от прямой AD, причем $AE = DE$. Длина высоты этого треугольника, проведенной из вершины E, равна $1\frac{2}{5}$. Найти площадь общей части трапеции $ABCD$ и треугольника AED.

4. (ВМиК-85.2) В трапеции $PQRS$ длина основания QR равна 10, длина диагонали QS равна 19, а $\widehat{QSP} = 30°$. Вычислить, что больше: длина основания QR или длина стороны RS.

5. (м/м-93.3) В трапеции с основаниями 3 и 4 диагональ имеет длину 6 и является биссектрисой одного из углов. Может ли эта трапеция быть равнобокой?

6. (физ-95.8) Трапеция $ABCD$ $(BC||AD)$ вписана в окружность. Известно, что $|BC| = a, |AD| = b, \widehat{CAD} = \alpha$. Найти радиус окружности.

7. (физ-96.4) В трапеции $ABCD$ ($BC||AD$) $|AB| = c$ и расстояние от середины отрезка CD до прямой AB равно d. Найти площадь трапеции.

8. (м/м-95.4) На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взята такая точка M, что $|AM| : |BM| = 2 : 3$. на противоположной стороне CD взята такая точка N, что отрезок MN делит трапецию на части, одна из которых по площади втрое больше другой. Найти отношение $|CN| : |DN|$, если $|BC| : |AD| = 1 : 2$.

9. (почв-93.4) Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках E и F, $|EF| = 2$. Найти основания трапеции, если их отношение равно 4.

10. (почв-91.4) В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 4, длина основания BC равна 3, длины сторон AB и CD равны. Точки M и N лежат на диагонали BD, причем точка M расположена между точками B и N, а отрезки AM и CN перпендикулярны диагонали BD. Найдите длину отрезка CN, если $|BM| : |DN| = 2 : 3$.

11. (филолог-86.4) В трапеции $ABCD$ сторона AB параллельна стороне CD. Диагонали трапеции пересекаются в точке O, причем треугольник BOC является равносторонним. Найти длину стороны CB, если $|AB| = 5, |CD| = 3$.

12. (геогр-98.3) Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) равна 48, а площадь треугольника AOB, где O - точка пересечения диагоналей трапеции, равна 9. Найти отношение оснований трапеции $AD : BC$.

13. (почв-79.4) В трапеции $ABCD$ отрезки AB и DC являются основаниями. Диагонали трапеции пересекаются в точке E. Найти площадь треугольника BCE, если $AB = 30, DC = 24$, $AD = 3$, $\widehat{DAB} = \frac{\pi}{3}$.

14. (био-94.4) В трапеции $ABCD$ даны длины оснований $AD = 4$, $BC = 1$ и углы A и D при основании, равные соответственно arctg2 и arctg3. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник CBE, где E - точка пересечения диагоналей трапеции.

15. (физ-97.8) В трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$), $\widehat{ABC} = 90°$. Прямая, перпендикулярная стороне CD, пересекает сторону AB в точке M, а сторону CD - в точке N. Известно, что $|MC| = a$, $|BN| = b$, а расстояние от точки D до прямой MC равно c. Найти расстояние от точки A до прямой BN.

16. (м/м-94.4) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке E. Около треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D, F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $|AF| = a$, $|AD| = b$. Найти длину отрезка EF.

17. (био-79.3) Около окружности радиуса R описана трапеция. Хорда соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции, параллельна основаниям трапеции. Длина этой хорды равна b. Найти площадь трапеции.

18. (ВМиК-84.3) В трапеции $ABCE$ длина основания AE равна 16, а длина боковой стороны CE равна $8\sqrt{3}$. Окружность, проходящая через точки A, B, C, пересекает прямую AE в точке H. Величина угла AHB равна $60°$. Найти длину отрезка BH.

19. (м/м-89.3) Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, причем $|KN| = 3$, а угол M равен $120°$. Прямые LM и MN являются касательными к окружности, описанной около треугольника KLN. Найти площадь треугольника KLN.

20. (геол-92.5) В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$, в которой $AB \parallel DC$, $|AB| = 5$, $|DC| = 1$, $\widehat{ABC} = 60°$. Точка K лежит на отрезке AB, причем $|AK| = 2$. Прямая CK пересекает окружность в точке F, отличной от C. Найти площадь треугольника OFC.

21. (м/м-81.4) Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана в окружность. На дуге CD взята точка E и соединена со всеми вершинами трапеции. Известно, что $\widehat{CED} = 120°$, $\widehat{ABE} - \widehat{BAE} = \delta$. Найти отношение периметра треугольника ABE к радиусу вписанной в него окружности.

22. (ИСАА-91.2) В равнобедренную трапецию с боковой стороной, равной 9, вписана окружность радиуса 4. Найдите площадь трапеции.

23. (физ-77.4) Дана трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{2/3}$. Найти углы трапеции.

24. (филолог-80.4) В трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана окружность с центром O. Найти площадь трапеции, если угол DAB прямой, $|OC| = 2$ и $|OD| = 4$.

25. (м/м-77.2) Длины боковых сторон трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно $\dfrac{5}{11}$. Найти длины оснований трапеции.

26. (геол.ОГ-88.3) В трапецию вписана окружность. Точка касания делит одну из боковых сторон на отрезки длиной 12 и 3, меньшее основание равно 9. Найти площадь трапеции.

27. (хим-78.4) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина боковой стороны AB равна 2. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E. В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке H. $|MH| = 1$. Найти величину угла BAD.

28. (филолог-88.4) Окружность, проходящая через вершину D и касающаяся сторон AB и BC равнобедренной трапеции $ABCD$, пересекает стороны AD и DC соответственно в точках M и N. Известно, что $|AM| : |MD| = 1 : 3, |CN| : |ND| = 4 : 3$. Найти длину основания BC, если $|AB| = 7, |AD| = 6$.

29. (филолог-91.5) В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $|AD| = 4, |BC| = 3$.

30. (экон-95.3) В трапеции $KLMN$ известны боковые стороны $|KL| = 36$, $|MN| = 34$, верхнее основание $|LM| = 10$ и $\cos\widehat{KLM} = -\dfrac{1}{3}$. Найти диагональ LN.

31. (хим-95.4) Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найти площадь трапеции, если ее средняя линия равна 5.

32. (м/м-80.3) В трапеции длина средней линии равна 4, углы при одном из оснований имеют величины 40° и 50°. Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований, равна 1.

§8. Параллелограммы.

В этом параграфе собраны задачи на параллелограммы. Приведем некоторые факты, касающиеся параллелограммов (см. рис. 1).

- Выпуклый четырехугольник *является параллелограммом* тогда и только тогда, когда его диагонали в точке пересечения делятся пополам.
- *Площадь параллелограмма ABCD* равна

$$S = AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = AD \cdot h = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \alpha.$$

где h - высота параллелограмма, проведенная к стороне AD, α - угол между диагоналями параллелограмма.

- Если $ABCD$ - параллелограмм, то сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон, т.е.

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2).$$

- *Около параллелограмма можно описать* окружность тогда и только тогда, когда он является прямоугольником.
- *В параллелограмм можно вписать* окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.
- *Около ромба можно описать* окружность тогда и только тогда, когда он является квадратом.
- *В прямоугольник можно вписать* окружность тогда и только тогда, когда он является квадратом.

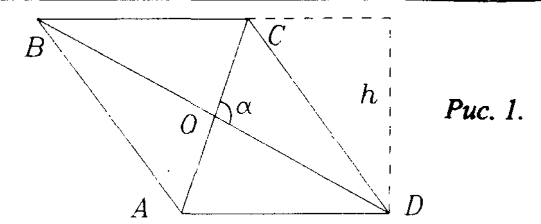


Рис. 1.

1. (геол-87.1) Найти площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна стороне ромба с диагоналями 10 и 12.

2. (хим-93.4) В квадрат площадью 18 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Стороны прямоугольника относятся, как 1:2. Найти площадь прямоугольника.

3. (экон-78.2) В плоскости дан квадрат с последовательно расположенными вершинами A, B, C, D и точка O. Известно, что $OB = OD = 13$, $OC = 5\sqrt{2}$ и что площадь квадрата больше 225. Найти длину стороны квадрата и выяснить, где расположена точка O — вне или внутри квадрата.

4. (физ-88.4) В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M, такой, что $\dfrac{|DM|}{|MC|} = 2$. Известно, что $\widehat{CAM} = \alpha$. Найти $\widehat{BAD}$.

5. (экон.К-78.2) В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB втрое длиннее стороны BC. Внутри прямоугольника лежит точка N, причем $|AN| = \sqrt{2}, |BN| = 4\sqrt{2}, |DN| = 2$. Найти косинус угла BAN и площадь прямоугольника $ABCD$.

6. (филолог-92.3) В ромбе $ABCD$ угол при вершине A равен $\dfrac{\pi}{3}$. Точка N делит сторону AB в отношении $|AN| : |NB| = 2 : 1$. Определить $\mathrm{tg}\widehat{DNC}$.

7. (геогр-84.2) В ромбе $ABCD$, длина стороны которого равна 6, а $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{3}$, на стороне BC взята точка E, на расстоянии, равном 2 от точки C. Найти расстояние от точки E до центра ромба.

8. (экон.К-79.2) Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48, а длина диагонали равна 10. На плоскости, в которой расположен прямоугольник, выбрана точка O так, что $|OB| = |OD| = 13$. Найти

расстояние от точки O до наиболее удаленной от нее вершины прямоугольника.

9. (филолог-82.4) В параллелограмме $ABCD$ $|AB| = |BD| = 1$. Длины диагоналей относятся как $1 : \sqrt{3}$. Найти площадь той части круга, описанного около треугольника BDC, которая не принадлежит кругу, описанному около треугольника ADC.

10. (экон-77.4) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E, F, H, G являются соответственно серединами отрезков AB, BC, CD, AD; O– точка пересечения отрезков EH и FG. Известно, что $EH = a, FG = b, \widehat{FOH} = \frac{\pi}{3}$. Найти длины диагоналей четырехугольника $ABCD$.

11. (м/м-88.3) В параллелограмме $PQRS$ биссектриса угла при вершине P, равного $80°$, пересекает сторону RS в точке L. Найти радиус окружности, касающейся отрезка PQ и лучей QR и PL, если известно, что $|PQ| = 7$.

12. (м/м-82.2) Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке O, при этом $AO = OC = 1, BO = OD = 2$. Найти периметр четырехугольника $ABCD$.

13. (физ-79.5) В ромб $ABCD$, у которого $|AB| = l$ и $\widehat{BAD} = \alpha$, вписана окружность. Касательная к этой окружности пересекает сторону AB в точке M, а сторону AD - в точке N. Известно, что $|MN| = 2a$. Найти длины отрезков MB и ND.

14. (био-80.4) Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 26. Величина угла ABC равна $120°$. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCD, равен $\sqrt{3}$. Найти длины сторон параллелограмма, если известно, что длина стороны AD больше длины стороны AB.

15. (хим-92.3) В параллелограмме $ABCD$ угол BCD равен $150°$, а основание AD равно 8. Найти радиус окружности, касающейся прямой CD и проходящей через вершину A, а также пересекающей основание AD на расстоянии 2 от точки D.

16. (экон-91.3) Окружность, диаметр которой равен $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина касательной, проведенной из точки C к окружности, равна 3, а

$|AB| = 1$. Найдите все возможные значения, которые может принимать длина стороны BC.

17. (экон-86.4) В прямоугольнике $ABCD$, в котором $|AB| = 6$, а $|AD| = 3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, расположены две окружности. Окружность радиуса 2 с центром в точке K касается сторон AB и AD. Окружность радиуса 1 с центром в точке L касается стороны CD и первой окружности. Найти площадь треугольника CLM, если M - основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L.

18. (геол-97.6) В ромб, одна из диагоналей которого равна 10, вписан круг радиуса 3. Вычислить площадь части ромба, расположенной вне круга. Будет ли эта площадь больше 9? (Ответ обосновать).

19. (почв-96.4) В параллелограмме $ABCD$ точки E и F лежат соответственно на сторонах AB и BC, M - точка пересечения прямых AF и DE, причем $|AE| = 2|BE|$, $|BF| = 3|CF|$. Найдите численное значение отношения $|AM| : |MF|$.

20. (ИСАА-97.6) В прямоугольнике $ABCD$ на сторонах AB и AD выбраны соответственно точки E и F так, что $AE : EB = 3 : 1$, $AF : FD = 1 : 2$. Найти отношение $EO : OD$, где O - точка пересечения отрезков DE и CF.

§9. Общие четырехугольники и многоугольники.

Этот параграф является последним в разделе планиметрии. В нем собраны задачи на общие четырехугольники и многоугольники. К данному моменту вы должны хорошо знать и уметь пользоваться всеми теоремами и формулами планиметрии. Приведем несколько фактов, касающихся общих четырехугольников (см. рис. 1).

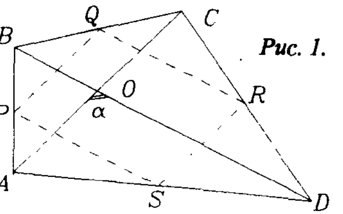


Рис. 1.

- *Площадь произвольного выпуклого четырехугольника* равна

  $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$,

  где d_1 и d_2 - диагонали четырехугольника, а α - угол между ними.

- *В выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно вписать* окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$.

- *Около выпуклого четырехугольника можно описать* окружность тогда и только тогда, когда сумма каких-нибудь двух его противоположных углов равна $180°$.

- Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $\pi(n-2)$.

Теорема 3. Четырехугольник, вершины которого являются серединами сторон произвольного выпуклого четырехугольника, есть параллелограмм ($PQRS$ на рис. 1).

Докажите эту теорему самостоятельно.

1. (психфак-77.4) В окружность радиуса 17 вписан четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны и находятся на расстоянии 8 и 9 от центра окружности. Найти длины сторон четырехугольника.

2. (ВМиК-98(1).4) В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть K— точка пересечения его диагоналей. Известно, что $AB > BC > KC$, $BK = 4 + \sqrt{2}$, а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 14 и 7. Найти DC.

3. (экон-85.6) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E - точка пересечения диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь всего четырехугольника не превосходит 4, $|AD| = 3$. Найти длину стороны BC.

4. (хим-77.4) В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны 1 и 2. Найти площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

5. (био-93.5) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AD и BC. Найти угол, образованный продолжением сторон AB и CD.

6. (почв-95.6) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются под углом $60°$, а их длины относятся как 1:3. Чему равна меньшая диагональ четырехугольника $ABCD$, если большая равна $\sqrt{39}$?

7. (хим-89.4) Параллелограммы $ABCD$ и $A'BCD'$ имеют общую сторону BC и расположены симметрично относительно прямой BC (точка A' симметрична точке A, точка D' симметрична точке D). Диагональ BD первого параллелограмма и сторона BA' второго параллелограмма лежат на одной прямой. Угол между диагоналями AC и $A'C$ двух параллелограммов равен $45°$. Площадь пятиугольника $ADCD'A'$ равна $15\sqrt{2}$. Найти длины сторон параллелограмма $ABCD$.

8. (психфак-83.3) В треугольниках ABC и $A'B'C'$: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\widehat{BAC} = 60°$, $\widehat{B'A'C'} = 120°$. Известно, что $B'C' : BC = \sqrt{n}$ (где n– целое число). Найти отношение длины AB к длине AC. При каких значениях n задача имеет хотя бы одно решение.

9. (экон-94.6) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок CM, соединяющий вершину C с точкой M, расположенной на стороне AD, пересекает диагональ BD в точке K. Известно, что $CK : KM = 2 : 1$, $CD : DK = 5 : 3$, $\widehat{ABD} + \widehat{ACD} = 180°$. Найти отношение стороны AB к диагонали AC.

10. (экон-84.5) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ вершины A и C противоположны, $|BC| = 4$, $\widehat{ADC} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}$. Найти длину стороны CD, если площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2}(|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|)$.

11. (психфак-87.5) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC, COD, AOD равны соответственно 20, 40, 60. Найти угол BAO, если известно, что $|AB| = 15, |AO| = 8$, а угол BOA больше $31°$.

12. (м/м-92.2) Диагонали четырехугольника $PQRS$, вписанного в окружность, пересекаются в точке D. На прямой PR взята точка A, причем $\widehat{SAD} = 50°$, $\widehat{PQS} = 70°$, $\widehat{RQS} = 60°$. Где расположена точка A: на диагонали PR или на её продолжении? Ответ обосновать.

13. (филолог-78.5) Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность единичного радиуса. Известно, что $|AB| = \sqrt{2}$, $\widehat{ABE} = \frac{\pi}{4}$, $\widehat{EBD} = \frac{\pi}{6}$ и $|BC| = |CD|$. Чему равна площадь пятиугольника?

14. (психфак-92.3) Точки K, L, M, N, P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника KLM, если $LM \| KN$, $KM \| NP$, $MN \| LP$, $\widehat{LOM} = 45°$, где O - точка пересечения хорд LN и MP.

15. (ВМиК-79.3) В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к AB, пересекает сторону CD в точке M. Доказать, что EM - медиана треугольника CED, и найти ее длину, если $|AD| = 8, |AB| = 4$ и $\widehat{CDB} = \alpha$.

16. (почв-94.5) В четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны и пересекаются в точке P. Отрезок, соединяющий вершину C с точкой M, являющейся серединой отрезка AD, равен $\frac{5}{4}$. Расстояние от точки P до отрезка BC равно $\frac{1}{2}$ и $|AP| = 1$. Найти длину отрезка AD, если известно, что вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

17. (геогр-89.5) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Известно, что $|AD| = 2, \widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90°$ и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника ABD и точкой пересечения биссектрис треугольника ACD равно $\sqrt{2}$. Найти длину стороны BC.

18. (физ-96.8) В остроугольном треугольнике ABC из основания D высоты BD опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC. Известно, что $|MN| = a, |BD| = b$. Найти угол ABC.

19. (соц-98.4) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина стороны AD равна 4, длина стороны CD равна 7, косинус угла ADC равен $\dfrac{1}{2}$, синус угла BCA равен $\dfrac{1}{3}$. Найти сторону BC, если известно, что окружность, описанная около треугольника ABC, проходит также и через точку D.

20. (геол-98(2).6) Четырехугольник $PQRS$ вписан в окружность. Диагонали PR и QS перпендикулярны и пересекаются в точке M. Известно, что $PS = 13$, $QM = 10$, $QR = 26$. Найти площадь четырехугольника $PQRS$.

21. (экон-92.5) Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а продолжения сторон AB и CD - в точке O. отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AOD. Найти отношение площадей треугольника AOD и четырехугольника $ABCD$, если $|OA| = 12, |OD| = 8, |CD| = 2$.

22. (психфак-91.4) Точки K, L, M делят стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ в отношении: $|AK| : |BK| = |CL| : |BL| = |CM| : |DM| = 1 : 2$. Радиус окружности, описанной около треугольника KLM, равен $\frac{5}{2}, |KL| = 4, |LM| = 3$. Какова площадь $ABCD$, если известно, что $|KM| < |KL|$?

23. (м/м-95.4) В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, P - точка пересечения его диагоналей, $|AB| = |CD| = 5, |AD| > |BC|$. Высота, опущенная из точки B на сторону AD, равна 3, а площадь треугольника ADP равна 12,5. Найти длины сторон AD, BC и радиус окружности.

24. (био-89.4) В окружность радиуса 2 вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K, лежащей на продолжении стороны AF так, что $|KA| < |KF|$ и $|KA| = \sqrt{11} - 1$, проведена секущая KH, пересекающая окружность в точках N и H. Известно, что внешняя часть секущей KN равна 2 ($|KN| = 2$), а угол NFH - тупой. Найти угол HKF.

25. (психфак-89.4) В четырехугольнике $ABCD$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон AB, BC и CD, а другая - сторон AB, AD и CD. Прямая MN пересекает стороны AB и CD соответственно в точках M и N и касается обеих окружностей. Найти расстояние между центрами окружностей, если периметр четырехугольника $MBCN$ равен $2p, |BC| = a$ и разность радиусов окружностей равна r.

26. (геол-94.8) Четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать и около него можно описать окружности. Диаметр описанной окружности совпадает с диагональю AC. Доказать, что разности длин его противоположных сторон равны по модулю.

27. (геол-79.5) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = \frac{25}{64}, BC = 12\frac{25}{64}, CD = 6\frac{1}{4}$. Известно, что угол DAB острый, угол ADC ту-

пой, причем $\sin\widehat{DAB} = \frac{3}{5}$, $\cos\widehat{ABC} = -\frac{63}{65}$. Окружность с центром в точке O касается сторон BC, CD и AD. Найти длину отрезка OC.

28. (физ-81.6) В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектриссы углов A и B пересекаются в точке E, лежащей на стороне CD. Известно, что отношение длины отрезка CD к длине отрезка BC равно m. Найти:
    1) отношение расстояний от точки E до прямых AD и BC,
    2) отношение площадей треугольников ADE и BCE.

29. (м/м-97.4) Диагонали вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, причем $\widehat{ADB} = \frac{\pi}{8}$, $BD = 6$, $AD \cdot CE = DC \cdot AE$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

30. (м/м-98(2).3) В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно, $\hat{A} = 35°$, $\hat{D} = 145°$, а площадь треугольника BCE равна 11. Найти площадь пятиугольника $ABCDE$.

§10. Задачи последних лет

В этом параграфе собраны задачи последних лет, не вошедшие в предыдущие параграфы

1. (ВМиК-99(1).4) На стороне BC треугольника ABC взята точка D такая, что $\angle CAD = 2\angle DAB$. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ADC и ADB, равны соответственно 8 и 4, а расстояние между точками касания этих окружностей с прямой BC равно $\sqrt{129}$. Найти AD.

2. (ВМиК-99.6) В остроугольном треугольнике ABC угол $\angle ACB = 75°$, а высота, опущенная из вершины этого угла, равна 1. Найти радиус описанной окружности, если известно, что периметр треугольника ABC равен $4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

3. (ВМиК-00(1).4) На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D так, что $|CD| = \sqrt{13}$ и $\sin\widehat{ACD} : \sin\widehat{BCD} = 4 : 3$. Через середину отрезка CD проведена прямая, пересекающая стороны AC и

BC в точках M и N соответственно. Известно, что $\widehat{ACB} = 120°$, площадь треугольника MCN равна $3\sqrt{3}$, а расстояние от точки M до прямой AB в два раза больше расстояния от точки N до этой же прямой. Найти площадь треугольника ABC.

4. (ВМиК-00.6) Вершины A и C параллелограмма $ABCD$ лежат на одной окружности, а вершины B и D– на другой, причем центры окружностей лежат в плоскости параллелограмма. Длины диагоналей параллелограмма равны 6 и 2 соответственно. Расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ до прямой, проходящей через точки пересечения окружностей, равно 2. Найти расстояние между центрами окружностей.

5. (геол-99(1).8) Две окружности радиусов $\sqrt{19}$ и $\sqrt{76}$, касающиеся друг друга внешним образом, вписаны в полуокружность (т.е. каждая из окружностей касается этой полуокружности и ее диаметра). Вычислить радиус полуокружности.

6. (геол-99.4) Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Угол между AM и высотой AH равен $40°$. Найти углы треугольника ABC.

7. (геол-00(1).4) В треугольнике KMN известны $\sin\widehat{KNM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos\widehat{KMN} = \frac{1}{3}$. Найти отношение длин высот, опущенных соответственно из вершины N на сторону MK и из вершины M на сторону NK.

8. (геол-00.6) В трапецию с основаниями 3 и 5 можно вписать окружность и около нее можно описать другую окружность. Вычислить площадь пятиугольника, образованного радиусами вписанной окружности, перпендикулярными боковым сторонам трапеции, ее меньшим основанием и соответствующими отрезками боковых сторон.

9. (экон-99.4) В трапеции $ABCD$ ($AB||CD$) диагонали $AC = a$, $BD = \frac{7}{5}a$. Найти площадь трапеции, если $\angle CAB = 2\angle DBA$.

10. (экон-00.4) Точка Q расположена на стороне MN треугольника LMN так, что $|NQ| : |QM| = 1 : 2$. При повороте этого треугольника на некоторый угол вокруг точки Q вершина L переходит в

вершину N, а вершина M – в точку P, лежащую на продолжении стороны LM за точку L. Найти углы треугольника LMN.

11. (экон.В-99.3) В параллелограмме $ABCD$ ($AB||CD$) диагонали $AC = c$, $BD = \frac{3}{2}$ c. Найти площадь параллелограмма, если $\angle CAB = 2\angle ABD$.

12. (экон.М-99.3) В параллелограмме $ABCD$ ($AB||CD$) диагонали $AC = c$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} c$. Найти площадь параллелограмма, если $\angle CAB = 60°$.

13. (экон.М-00.4) При повороте треугольника EFG на угол $\arccos\frac{1}{3}$ вокруг точки O, лежащей на стороне EG, вершина F переходит в вершину E, а вершина G – в точку H, лежащую на стороне FG. Найти отношение, в котором точка O делит сторону EG.

14. (ИСАА-99.6) Окружности радиусов 3 и 6 с центрами соответственно в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. К окружностям проведены общая внешняя касательная и общая внутренняя касательная. Эти касательные пересекаются в точке B, а L– общая точка внешней касательной и окружности радиуса 6. Найти радиус окружности, вписанной в четырехугольник $ABLO_2$.

15. (ИСАА-00.2) Определить радиус окружности, если вписанный в нее угол со сторонами, длины которых равны 1 и 2, опирается на дугу 120°.

16. (физ-98(1).4) В трапеции $ABCD$, описанной около окружности, $BC||AD$, $AB = CD$, $\widehat{BAD} = 45°$. Площадь трапеции равна 10. Найти AB.

17. (физ-98(1).7) В треугольнике ABC $\widehat{BAC} = \alpha, AC = b$. Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках M и N, биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке K. Найти расстояние от точки K до прямой AC.

18. (физ-98(2).4) Окружности радиусов 2 и 3 внешним образом касаются друг друга в точке A. Их общая касательная, проходящая

через точку A, пересекает две другие их общие касательные в точках B и C. Найти BC.

19. (физ-98(2).8) В треугольнике ABC $AB = c, AC = b, (b > c), AD-$ биссектриса. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная AD и пересекающая AC в точке E. Найти AE.

20. (физ-98.4) Медианы AM и CN треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно,что $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BCA} = \beta$, $AC = b$. Найти расстояние от точки O до прямой AC.

21. (физ-98.6) На отрезке AB взята точка C, отрезки AB и CB служат диаметрами окружностей. Хорда AM касается меньшей окружности в точке D. Прямая BD пересекает бо̀льшую окружность в точке N, $\widehat{DAB} = \alpha$, $AB = 2R$. Найти площадь четырехугольника $ABMN$.

22. (физ-99(1).4) В треугольнике ABC $AB = BC, \widehat{BAC} = 45^\circ$. Прямая MN пересекает сторону AC в точке M, а сторону BC в точке N, $AM = 2 \cdot MC$, $\widehat{NMC} = 60^\circ$. Найти отношение площади треугольника MNC к площади четырехугольника $ABNM$.

23. (физ-99(1).6) На сторонах острого угла ABC взяты точки A и C. Одна окружность касается прямой AB в точке B и проходит через точку C. Вторая окружность касается прямой BC в точке B и проходит через точку A. Точка $D-$ вторая общая точка окружностей. Известно, что $AB = a$, $CD = b$, $BC = c$. Найти AD.

24. (физ-99(2).4) В треугольнике ABC взяты точка N на стороне AB, а точка $M-$ на стороне AC. Отрезки CN и BM пересекаются в точке O, $AN : NB = 2 : 3, BO : OM = 5 : 2$. Найти $CO : ON$.

25. (физ-99(2).6) В ромбе $ABCD$ высоты BP и BQ пересекают диагональ AC в точках M и N (M между A и N), $AM = p$, $MN = q$. Найти PQ.

26. (физ-99.3) В равнобочную трапецию $ABCD$ ($BC||AD$) вписана окружность, $BC : AD = 1 : 3$, площадь трапеции равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найти AB.

27. (физ-99.6) Через точку N проведены две прямые, касающиеся некоторой окружности с центром O. На одной из этих прямых взята точка A, а на другой прямой взята точка B так, что $OA = OB$, $OA > ON$, $NA \neq NB$. Известно, что $NA = a$, $NB = b$, $OA = c$. Найти ON.

28. (физ-00(1).4) В треугольнике ABC AD – медиана, $|AD| = m$, $|AB| = a$, $|AC| = b$. Найти $\widehat{BAC}$.

29. (физ-00(1).8) Из точки A проведены к окружности две касательные (M и N – точки касания) и секущая, пересекающая эту окружность в точках B и C, а хорду MN – в точке P, $|AB| : |BC| = 2 : 3$. Найти $|AP| : |AC|$.

30. (физ-00(2).4) В трапеции $ABCD$ $BC \parallel AD$, $|AD| = 3|BC|$. Прямая пересекает боковые стороны трапеции в точках M и N, $|AM| : |MB| = 3 : 5$, $|CN| : |ND| = 2 : 7$. Найти отношение площадей четырехугольников $MBCN$ и $AMND$.

31. (физ-00(2).8) На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $|AD| = a$, $|MD| = b$, H – точка пересечения высот треугольника ABC. Найти $|AH|$.

32. (физ-00.4) На стороне AC треугольника ABC взята точка A_1, а на продолжении стороны BC взята точка C_1 (C между B и C_1), длина отрезка A_1C равна 85% длины стороны AC, а длина отрезка BC_1 равна 120% длины стороны BC. Сколько процентов площади треугольника ABC составляет площадь треугольника A_1BC_1?

33. (физ-00.6) В треугольнике ABC $|AB| = a$, $|AC| = b$, точка O – центр описанной окружности. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO пересекает сторону AC в точке D. Найти $|CD|$.

34. (м/м-99(1).4) Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $AB = AD$, CA– биссектриса угла C, $\widehat{BAD} = 140°$, $\widehat{BEA} = 110°$. Найти величину угла CDB.

35. (м/м-99(2).4) Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB. Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E. Найти AE, если $AB = 10$, $AC = 16$, $AD = 15$.

36. (м/м-99.4) В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 9$ и $CD = 5$ биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причем точка K лежит на основании AD.

    а) В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK – сторону BC ?

    б) Найти отношение $MN : KL$, если $LM : KN = 3 : 7$.

37. (м/м-00(1).4) Перпендикуляр к боковой стороне AB трапеции $ABCD$, проходящий через ее середину K, пересекает сторону CD в точке L. Известно, что площадь четырехугольника $AKLD$ в пять раз больше площади четырехугольника $BKLC$, $|CL| = 3$, $|DL| = 15$, $|KC| = 4$. Найти длину отрезка KD.

38. (м/м-00(2).3) Окружность, проходящая через вершины B, C и D параллелограмма $ABCD$, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найти длину отрезка AE, если $|AD| = 4$ и $|CE| = 5$.

39. (м/м-00.4) Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C. Касательная к первой окружности, проходящая через точку B, пересекает вторую окружность в точках D и E (D лежит между B и E). Известно, что $|AB| = 5$ и $|AC| = 4$. Найти длину отрезка CE и расстояние от точки A до центра окружности, касающейся отрезка AD и продолжений отрезков ED и EA за точки D и A соответственно.

40. (хим-99(1).4) В окружности радиуса 4 с центром в точке O проведены два диаметра AB и CD так, что угол $\widehat{AOC} = \frac{\pi}{9}$. Из точки M, лежащей на окружности и отличной от точек A, B, C и D, проведены к диаметрам AB и CD перпендикуляры MQ и MP соответственно (точка Q лежит на AB, а точка P– на CD) так, что $\widehat{MPQ} = \frac{2\pi}{9}$. Найти площадь треугольника MPQ.

41. (хим-99.4) В треугольнике ABC угол B равен $\frac{\pi}{6}$. Через точки A и B проведена окружность радиуса 2, касающаяся прямой AC в

точке A. Через точки B и C проведена окружность радиуса 3, касающаяся прямой AC в точке C. Найти длину стороны AC.

42. (ВКНМ-99(1).4) В окружность γ с центром в точке O вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Известно, что угол AOB втрое больше угла COD. Найти площадь круга, ограниченного окружностью γ, и сравнить с числом 510, если $CD = 10$. [1]

43. (хим-00(1).4) Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Найти ее длину, если $|BC| = |CE|$, площадь треугольника ADE равна площади треугольника CDE, площадь треугольника ABC равна площади треугольника BCD, а $3|AC| + 2|BD| = 5\sqrt{5}$.

44. (хим., ВКНМ-00.4) В угол вписано несколько окружностей, радиусы которых возрастают. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Найти сумму длин второй и третьей окружностей, если радиус первой равен 1, а площадь круга, ограниченного четвертой окружностью равна 64π.

45. (био-99.4) На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$, располаженные вне трапеции. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Найти длину отрезка AD, если $BC = 2$, $GO = 7$, а $GF = 18$.

46. (почв-99(1).5) Дан треугольник ABC, площадь которого равна 2. На медианах AK, BL и CN треугольника ABC взяты соответственно точки P, Q и R так, что $AP : PK = 1$, $BQ : QL = 1 : 2$, $CR : RN = 5 : 4$. Найти площадь треугольника PQR.

47. (почв-99.6) Дан треугольник ABC с основанием AB, равным $\frac{\sqrt{3}}{2}$, и высотой CH, опущенной на это основание и равной $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Известно, что точка H лежит на AB и $AH : HB = 2 : 1$. В угол ABC вписана окружность, центр которой лежит на высоте CH. Найти радиус этой окружности.

48. (почв-00(1).5) Высота трапеции $ABCD$ равна 5, а основания BC и AD соответственно равны 5 и 3. Точка E находится на стороне

[1] В июле абитуриенты ВКНМ сдавали письменный экзамен по математике вместе с абитуриентами химического факультета.

BC, причем $|BE| = 2$, F – середина стороны CD, а M – точка пересечения отрезков AE и BF. Найти площадь четырехугольника $AMFD$.

49. (почв-00.6) Биссектрисы внутренних углов треугольника продолжены до точек пересечения с описанной около треугольника окружностью, отличных от вершин исходного треугольника. В результате попарного соединения этих точек получился новый треугольник. Известно, что углы исходного треугольника равны 30, 60 и 90 градусам, а его площадь равна 2. Найти площадь второго треугольника.

50. (геогр-99(1).4) В треугольнике ABC биссектриса AD угла A и биссектриса BL угла B пересекаются в точке F. Величина угла LFA равна $60°$.

    1) Найти величину угла ACB.

    2) Вычислить площадь треугольника ABC, если $\widehat{CLD} = 45°$ и $AB = 2$.

51. (геогр-99.5) В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Точки L и M являются соответственно серединами сторон BC и AD. Отрезок LM содержит точку K. Четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать окружность. Найти радиус этой окружности, если $AB = 3$, $AC = \sqrt{13}$ и $LK : KM = 1 : 3$.

52. (геогр-00(1).4) В треугольнике ABC на сторонах AB и AC отмечены точки M и N соответственно, причем $BM = BN$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная BC, а через точку N – прямая, перпендикулярная AB. Эти прямые пересекаются в точке O. Продолжение отрезка BO пересекает сторону AC в точке P. $|AP| = 5$, $|PC| = 4$. Найти длину отрезка BP, если известно, что $|BC| = 6$.

53. (псих-99.5) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Длины противоположных сторон AB и CD равны соответственно 9 и 4, $AC = 7$, $BD = 8$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

54. (соц-99.3) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. При этом оказалось, что $\angle BAC = \angle BDC$, а площадь круга, описанного около треугольника BDC, равна $\dfrac{25\pi}{4}$.

1) Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

2) Зная, что $BC = 3$, $AC = 4$, $\widehat{BAD} = 90^\circ$, найти площадь четырехугольника $ABCD$.

55. (соц-00.5) В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность радиуса 2. Угол $\angle DAB$ прямой. $|AB| = 5$, $|BC| = 6$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

56. (филол-99.3) В треугольнике ABC медиана AK пересекает медиану BD в точке L. Найти площадь треугольника ABC, если площадь четырехугольника $KCDL$ равна 5.

57. (фил-00.2) Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC провели прямую MN параллельно основанию AB (M лежит на BC, N лежит на AC). Найти периметр четырехугольника $ABMN$, если известно, что $|AB| = 5$, $|MN| = 3$.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Введение.

Тетраэдр — простейший из многогранников. В школе его принято называть треугольной пирамидой, подчёркивая тем самым особенность одной из граней тетраэдра, которую называют основанием пирамиды. В тетраэдре 4 вершины, 6 рёбер и 4 грани. Геометрически все однотипные элементы тетраэдра равноправны. Геометрия тетраэдра очень обширна, подобно геометрии треугольника. Знание свойств тетраэдра и умение его *решать* так же важно при решении стереометрических задач, как умение *решать* треугольник и знание его свойств при решении задач планиметрии. Задачи такого типа представлены в параграфах §1 и §2. В параграфах §3 и §4 рассматриваются стереометрические задачи на *пирамиды*, *призмы* и другие *многогранники*, а также на *сферы (шары)*, *цилиндры*, *конусы* и другие *фигуры вращения*.

В каждом из четырёх параграфов задачи представлены в двух разделах. Первые разделы (в §1 — "*Свойства трёхгранного угла и тетраэдра*", в §2 — "*Тетраэдры со специальными свойствами*", в §3 и §4 — "*Подготовительные задачи*") содержат общезначимые задачи, которые можно называть *леммами* и *теоремами*, и достаточно простые задачи. Их использование при решении реальных конкурсных задач не обязательно, но они позволяют делать обобщения и дают некоторые общие подходы к решению стереометрических задач. Поскольку эти задачи являются задачами на *доказательство*, ответы на них не предусмотрены. Полезные соотношения и формулы приводятся непосредственно в текстах задач. Вторые разделы параграфов "*Конкурсные задачи*" содержат задачи письменных экзаменов по математике, проводимых в МГУ в 1970–1999 годы. Второй раздел §1 содержит задачи, основанные на использовании общих свойств тетраэдра и умении вычислять основные его элементы. Во втором разделе §2 представлены задачи, формулируемые для тетраэдров со специальными свойствами (правильные тетраэдры, правильные треугольные пирамиды, приямоугольные, равногранные и ортоцентрические тетраэдры). Во второй раздел §3 входят задачи, основанные на свойствах пирамид, призм и других многогранников. Второй раздел §4 содержит задачи, формулируемые для сфер (шаров), цилиндров, конусов и других фигур вращения. Большинство приводимых задач являются задачами на вычисление.

§1. Общие свойства тетраэдра.

Прежде, чем приступить к решению задач, ознакомимся с **основными теоремами стереометрии.**

- **Теорема (признак параллельности прямой и плоскости).** Если прямая параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости, то данные прямая и плоскость либо параллельны, либо прямая принадлежит плоскости.

- **Теоремы (о плоскости и прямой, параллельной плоскости).**
  1) Если плоскость содержит прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой.
  2) Если через каждую из двух параллельных прямых проведена произвольная плоскость и эти плоскости пересекаются, то линия пересечения этих плоскостей параллельна каждой из данных прямых.
  3) Если две пересекающиеся плоскости параллельны данной прямой, то линия их пересечения также параллельна данной прямой.

- **Теорема (признак параллельности двух плоскостей).** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

- **Теорема (о параллельных плоскостях).** Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны.

- **Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости).** Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то данная прямая и плоскость взаимно перпендикулярны.

- **Теоремы (о перпендикулярности прямых и плоскостей).**
  1) Два различных перпендикуляра к плоскости параллельны.
  2) Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая перпендикулярна этой плоскости.

3) Прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой плоскости.

4) Две плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

- **Теорема (признак перпендикулярности двух плоскостей).** Если плоскость содержит перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

- **Теоремы (о взаимно перпендикулярных плоскостях).**

  1) Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то прямая, принадлежащая одной плоскости и перпендикулярная линии пересечения плоскостей, перпендикулярна другой плоскости.

  2) Если две плоскости взаимно перпендикулярны и к одной из плоскостей проведён перпендикуляр, проходящий через линию пересечения этих плоскостей, то этот перпендикуляр целиком принадлежит другой плоскости.

- **Теорема (о трёх перпендикулярах).**

  Для того чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость.

Ознакомимся с некоторыми **определениями**. Обратите внимание, что определения даются в расширенном виде, содержат названия элементов определяемых фигур и некоторые простейшие, приводимые без доказательств, свойства.

- **Определение 1.** *Двугранным углом* называется фигура в пространстве, образованная двумя различными полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой. Полуплоскости называются *гранями*, а ограничивающая их прямая — *ребром* двугранного угла. Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым. Угол между этими полупрямыми называется *линейным углом* двугранного угла. Двугранный угол измеряется своим линейным углом. Полуплоскость, граница которой совпадает с ребром двугранного угла и которая делит двугранный угол на два равных двугранных угла, называется *биссекторной плоскостью*. (см. рис.1)

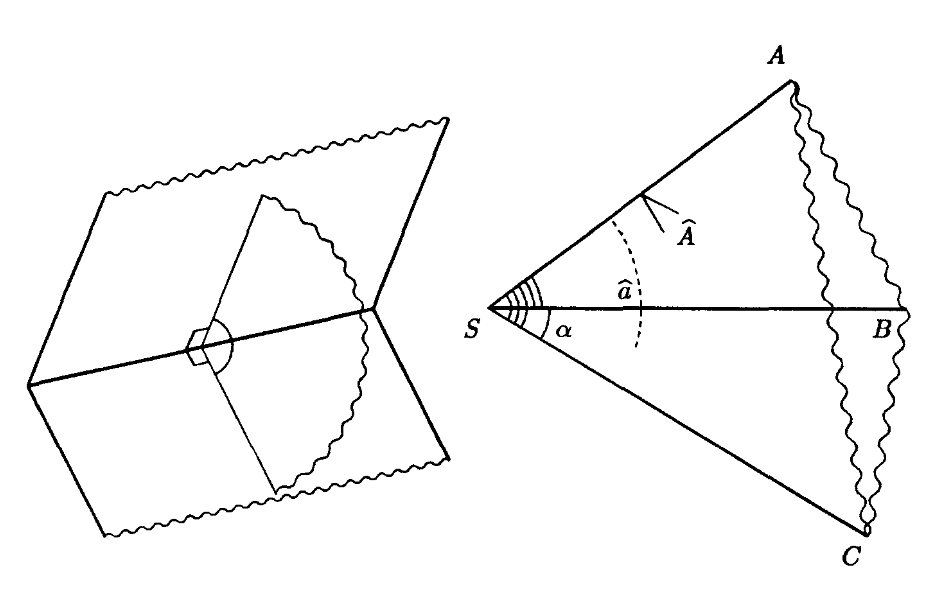


рис.1. Двугранный угол. *рис.2. Трёхгранный угол.*

- **Определение 2.** *Трёхгранным углом (иначе триэдром)* называется фигура в пространстве, составленная из трёх плоских углов с общей вершиной, не лежащих в одной плоскости, каждые два из которых имеют общую сторону, и нет стороны, общей для всех трёх углов. Эти плоские углы называются *гранями* трёхгранного угла, а их стороны — *рёбрами*. Общая вершина плоских углов называется *вершиной* трёхгранного угла. Двугранные углы, образованные продолжениями граней до полуплоскостей, называются *двугранными углами трёхгранного угла.* (см. рис.2)

- **Определение 3.** *Биссектрисой* трёхгранного угла называется полупрямая, начальная точка которой совпадает с вершиной трёхгранного угла, и каждая точка которой равноудалена от граней это трёхгранного угла. Биссектриса трёхгранного угла является пересечением трёх биссектральных плоскостей двугранных углов данного трёхгранного угла.

- **Определение 4.** Треугольная пирамида (пирамида, в основании которой лежит треугольник) называется *тетраэдром.* Два ребра

тетраэдра, имеющие в качестве одного из своих концов общую вершину тетраэдра, называются *смежными*. Два несмежных ребра называются *противоположными* (или *скрещивающимися*).

- **Определение 5.** Шар (сфера) называется *вписанным (вписанной)* в тетраэдр если он (она) касается всех четырёх граней тетраэдра. Для каждого тетраэдра существует единственный вписанный в него шар. Центром этого шара является точка пересечения биссектрис всех четырёх трёхгранных углов тетраэдра, то есть пересечением всех биссектральных плоскостей шести двугранных углов тетраэдра.

- **Определение 6.** Шар (сфера) называется *вневписанным (вневписанной)* в тетраэдр если он (она) касается одной грани и продолжений трёх других граней тетраэдра. Для каждого тетраэдра существуют четыре вневписанных шара.

- **Определение 7.** Шар (сфера) называется *описанным (описанной)* около тетраэдра если все четыре вершины тетраэдра принадлежат его поверхности (она проходит через все четыре вершины тетраэдра). Для каждого тетраэдра существует единственный описанный около него шар. Центром этого шара является точка пересечения четырёх перпендикуляров к граням, проведенных через центры окружностей, описанных около этих граней.

- **Определение 8.** *Медианой* тетрадра называют отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан (*центром*) противоположной грани. (см. рис.3)

- **Определение 9.** *Бимедианой* тетраэдра называется отрезок, соединяющий середины противоположных рёбер. (см. рис.3)

- **Определение 10.** Для каждой пары противоположных рёбер тетраэдра проведём пару параллельных плоскостей, содержащих эти рёбра. Полученный параллелепипед называется *описанным* около тетраэдра. Бимедианы тетраэдра соединяют центры противоположных граней описанного около него параллелепипеда, а значит равны рёбрам этого параллелепипеда. (см. рис.4)

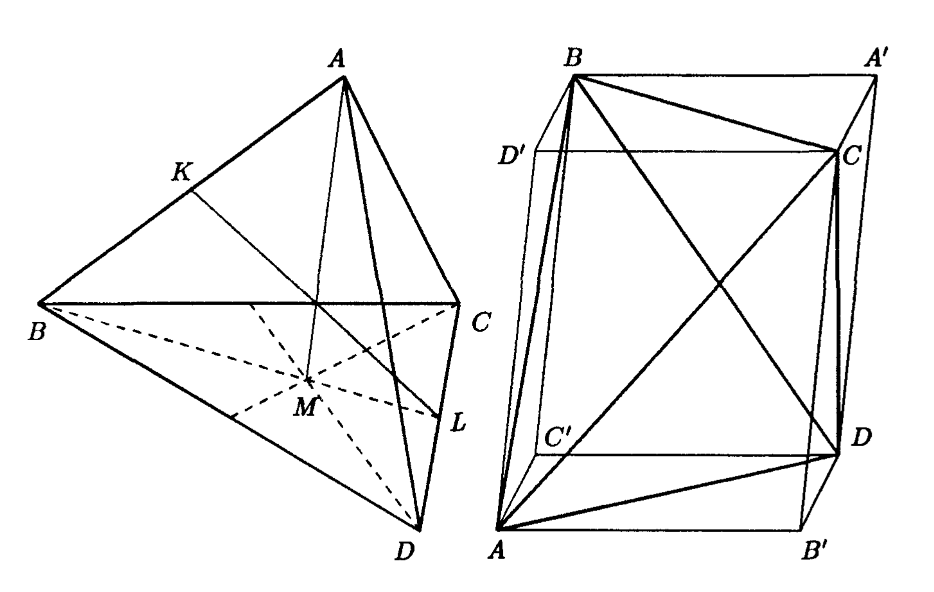


рис.3. Тетраэдр *рис.4. Описанный параллелепипед.*

- **Определение 11.** Высоты описанного около тетраэдра параллелепипеда называются *бивысотами тетраэдра*.

Объём тетраэдра вычисляется по следующей основной формуле, доказываемой в школьном курсе.

- **Основная формула для объёма тетраэдра.** Объём тетраэдра V вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3} S \cdot H$, где S — площадь основания тетраэдра, а H — высота тетраэдра.

Другие формулы для вычисления объёма тетраэдра сформулированы как задачи в подготовительном разделе.

Первый раздел. Свойства трёхгранного угла и тетраэдра.

1. Пусть α, β и γ — плоские углы трёхгранного угла, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ и $\widehat{C}$ — соответственно противолежащие им двугранные углы. Докажите, что $\sin\alpha : \sin\widehat{A} = \sin\beta : \sin\widehat{B} = \sin\gamma : \sin\widehat{C}$. (Первая теорема синусов для трёхгранного угла).

2. Плоские углы трёхгранного угла равны α, β и γ; противолежащие им рёбра образуют с плоскостями граней углы $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ и $\widehat{c}$. Докажите, что $\sin\alpha\cdot\sin\widehat{a} = \sin\beta\cdot\sin\widehat{b} = \sin\gamma\cdot\sin\widehat{c}$. (Вторая теорема синусов для трёхгранного угла).

3. Пусть α, β и γ — плоские углы трёхгранного угла, а $\widehat{A}$ — двугранный угол, противолежащий плоскому углу α. Докажите, что $\cos\alpha = \cos\beta\cdot\cos\gamma + \sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\widehat{A}$. (Первыя теорема косинусов для трёхгранного угла).

4. Пусть $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ и $\widehat{C}$ — двугранные углы трёхгранного угла, а α — плоский угол, противолежащи двугранному углу $\widehat{A}$. Докажите, что $\cos\widehat{A} = -\cos\widehat{B}\cdot\cos\widehat{C} + \sin\widehat{B}\cdot\sin\widehat{C}\cdot\cos\alpha$. (Вторая теорема косинусов для трёхгранного угла).

5. Сумма плоских углов трёхгранного угла равна 180°. Докажите, что сумма косинусов его двугранных углов равна 1.

6. В любом ли тетраэдре высоты пересекаются в одной точке?

7. Докажите, что центром описанной около тетраэдра сферы является точка пересечения всех шести плоскостей, проходящих через середины рёбер и перпендикулярных к ним.

8. Докажите, что три бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке (называемой *центроидом*) и делятся этой точкой пополам.

9. Докажите, что четыре медианы тетрадра пересекаются в одной точке (в его *центроиде*) и этой точкой делятся в отношении $3:1$ считая от вершины тетраэдра.

10. Пусть K и L являются серединами рёбер AB и CD тетраэдра $ABCD$. Докажите, что длина бимедианы KL вычисляется через

длины рёбер тетраэдра по формуле

$$KL = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + CB^2 + BD^2 + DA^2 - AB^2 - CD^2}.$$

11. Пусть M — точка пересечения медиан $\triangle BCD$. Докажите, что длина медианы AM тетраэдра $ABCD$ вычисляется через длины рёбер тетраэдра по формуле

$$AM = \frac{1}{3}\sqrt{3\cdot(AB^2 + AC^2 + AD^2) - BC^2 - CD^2 - DB^2}.$$

12. Три отрезка, не лежащие в одной плоскости, пересекаются в точке O, делящей каждый из них пополам. Докажите, что существуют ровно два тетраэдра, в которых эти отрезки соединяют середины противоположных рёбер. Докажите, что эти тетраэдры симметричны относительно точки O.

13. Пусть S_1 и S_2 — площади граней ABC и ABD соответственно тетраэдра $ABCD$, длины рёбер AB и CD равна a и b соответственно, α — величина двугранного угла при ребре AB, φ — величина угла между противоположными рёбрами AB и CD. Докажите, что

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = \frac{1}{4}\left(ab\sin\varphi\right)^2.$$

Примечание: $\frac{1}{4}\left(ab\sin\varphi\right)^2$ — площадь любой из двух равных граней описанного параллелепипеда при рёбрах AB и CD. (Теорема косинусов для тетраэдра).

14. Докажите, что объём тетраэдра сосоставляет одну треть от объёма описанного параллелепипеда.

15. Докажите, что объём тетраэдра равен одной трети произведения площади его полной поверхности на радиус вписанного шара.

16. Пусть S_1 и S_2 — площади граней тетраэдра, прилегающих к ребру длины a, а α — величина двугранного угла при этом ребре. Докажите, что объём тетраэдра V удовлетворяет равенству

$$V = \frac{2}{3a}\cdot S_1S_2\cdot\sin\alpha.$$

17. Дан тетраэдр $ABCD$. Пусть $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$, $\angle CAD = \beta$, $\angle BAD = \gamma$ и величина двугранного угла при ребре AD равна $\widehat{D}$. Докажите, что объём тетраэдра

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot bcd \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \sin\widehat{D}.$$

18. Дан тетраэдр $ABCD$. Пусть $AB = a$, $CD = b$, расстояние между прямыми AB и CD (бивысота) равна d, а величина угола между этими прямыми равена φ. Докажите, что объём тетраэдра

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot abd \cdot \sin\varphi.$$

19. Пусть S_1, S_2, S_3 и S_4 — площади граней тетраэдра, а V — его объём. Докажите, что для любой пары противоположных рёбер справедливо равенство

$$\frac{ab}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2},$$

где a и b — длины противоположных рёбер, а α и β — величины двугранных углов при них. (Теорема синусов для тетраэдра)

20. Докажите, что сумма квадратов длин рёбер тетраэдра равна учетверённой сумме квадратов длин его бимедиан.

21. Прямая l проходит через середины рёбер AB и CD тетраэдра $ABCD$; плоскость П, содержащая l, пересекает рёбра BC и AD в точках M и N. Докажите, что прямая l делит отрезок MN пополам.

22. Пусть S_1, S_2, S_3 и S_4 — площади граней тетраэдра, а P_1, P_2 и P_3 — площади граней описанного около этого тетраэдра параллелепипеда. Докажите, что

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2.$$

23. Пусть a и a_1, b и b_1, c и c_1 — длины противоположных рёбер тетраэдра; α, β, γ — соответственно углы между ними (α, β, $\gamma \leq 90°$). Докажите, что одно из чисел $aa_1\cos\alpha$, $bb_1\cos\beta$ и $cc_1\cos\gamma$ — сумма двух других.

24. Пусть h_1, h_2, h_3 и h_4 — длины высот тетраэдра, а d_1, d_2 и d_3 — длины его бивысот. Докажите, что

$$\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}+\frac{1}{h_4^2}=\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}.$$

25. Пусть M — центроид тетраэдра $ABCD$, O — центр его описанной сферы. Докажите, что:
а) $DM \perp OM \iff AB^2+BC^2+CA^2=AD^2+BD^2+CD^2$;
б) если точки D и M и точки пересечения медиан граней, сходящихся в вершине D, лежат на одной сфере, то $DM \perp OM$.

26. Пусть S_i, R_i и l_i ($i \in \{1,2,3,4\}$) — площади граней, радиусы описанных около этих граней окружностей и расстояния от центров этих окружностей до противоположных вершин тетраэдра соответственно, а V — его объём. Докажите что

$$18V^2=\sum_{i=1}^{4} S_i^2\left(l_i^2-R_i^2\right).$$

27. Докажите, что для любого тетраэдра существует треугольник, длины сторон которого равны произведениям длин противоположных рёбер тетраэдра, причём площадь S этого треугольника равна $6VR$, где V — объём тетраэдра, R — радиус его описанной сферы. (Формула Крелле)

28. Пусть S_1, S_20, S_3 и S_4 — площади граней тетраэдра, V — его объём, a и b — длины противоположных рёбер, а α и β — величины двугранных углов при них. Докажите, что

$$a^2+b^2+2\cdot ab\cdot \mathrm{ctg}\alpha\cdot \mathrm{ctg}\beta=\frac{2Q-T}{9V^2},$$

где $Q=(S_1S_2)^2+(S_1S_3)^2+(S_1S_4)^2+(S_2S_3)^2+(S_2S_4)^2+(S_3S_4)^2$ и $T=S_1^4+S_2^4+S_3^4+S_4^4$. (Теорема Бретшнейдера)

Второй раздел. Конкурсные задачи.

1. (м/м-70.5) Длина каждого ребра треугольной пирамиды $SABC$ равна 1. Отрезок BD есть высота треугольника ABC. Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC, причём точки S и E лежат по одну сторону от плоскости основания ABC. Найти расстояние между точками S и E.

2. (м/м-71.3) Все грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а высота пирамиды совпадает с высотой одной из её боковых граней. Найти объём пирамиды, если расстояние между наибольшими противоположными рёбрами равно 1.

3. (м/м-72.4) В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом $60°$. Известно, что вершины A, B, C и середины боковых рёбер пирамиды расположены на сфере радиуса 1 *м*. Доказать, что центр указанной сферы лежит на ребре AB, и найти высоту пирамиды, опущенную на основание ABC.

4. (м/м-73.4) В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и ABD имеют площади p и q и образуют между собой угол α. Найти площадь сечения пирамиды, проходящего через ребро AB и центр вписанного в пирамиду шара.

5. (м/м-74.4) В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро $DC = 9$, ребро $DB = AD$, а ребро AC перпендикулярно к грани ABD. Сфера радиуса 2 касается грани ABC, ребра DC, а также грани DAB в точке пересечения её медиан. Найти объём пирамиды.

6. (м/м-77.5) Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

7. (м/м-78.5) Объём пирамиды $ABCD$ равен 5. Через середины рёбер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в

точке M. При этом отношение длины отрезка DM к длине отрезка MC равно $\frac{2}{3}$. Вычислить площадь сечения пирамиды указанной плоскостью, если расстояние от неё до вершины A равно 1.

8. (м/м-79.5) Основанием треугольной пирамиды $ABCD$ является треугольник ABC, в котором $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\angle C = \frac{\pi}{6}$, $BC = 2\sqrt{2}$. Длины рёбер AD, BD, CD равны между собой. Сфера радиуса 1 касается рёбер AD, BD, продолжения ребра CD за точку D и плоскости ABC. Найти величину отрезка касательной, проведённой из точки A к сфере.

9. (м/м-82.5) Дана треугольная пирамида $ABCD$ с вершиной D, грани которой ABD и ACD — прямоугольные треугольники, ребро AD перпендикулярно медиане AK основания ABC и $AD = AK$. Сечением пирамиды плоскостью, не проходящей через середины рёбер AD и BC, является равнобочная трапеция $EFGH$ с основаниями EF и GH, причём точка E делит ребро BD пополам, а точка G лежит на ребре AC и $AG = 3GC$. Найти отношение площади трапеции $EFGH$ к площади грани BCD.

10. (м/м-83.5) Дана треугольная пирамида $ABCD$. Точка F взята на ребре AD, а точка N взята на ребре DB так, что $DN : NB = 1 : 2$. Через точки F, N и точку пересечения медиан треугольника ABC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке H. Через точку H проведена плоскость, параллельная плоскости ADB и пересекающая рёбра CA и CD в точках L и K соответственно. Известно, что $\frac{CH}{HB} = \left(\frac{AF}{FD}\right)^2$ и что радиус шара, вписанного в пирамиду $CHLK$, равен R. Найти отношение площади треугольника ABC к сумме площадей всех граней пирамиды $ABCD$, если длина перпендикуляра, опущенного из вершины D на плоскость ABC, равна h.

11. (м/м-87.6) Сфера касается рёбер AS, BS, BC и AC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L, M и N соответственно. Найти длину отрезка KL, если $MN = 7$ *см*, $NK = 5$ *см*, $LN = 2\sqrt{29}$ *см* и $KL = LM$.

12. (м/м-94(2).5) Найти наибольшее значение объёма пирамиды $SABC$ при следующих ограничениях:

$$SA \le 4, \quad SB \ge 7, \quad SC \ge 9, \quad AB = 5, \quad BC \le 6, \quad AC \le 8.$$

13. (м/м-95(1).6) В пирамиде $SABC$ двугранные углы при рёбрах AB, BC и AC равны 90°, 30° и 90° соответственно. Плоскость пересекает рёбра SB, SC, AC и AB в точках K, L, M N и соответственно, причём четырёхугольник $KLMN$ — трапеция, основание KL которой втрое меньше основания MN. Найти площадь этой трапеции, если её высота равна 13 и $AS = BC = 13$.

14. (м/м-95(2).5) Высота пирамиды равна 5, а основанием служит треугольник со сторонами 7, 8 и 9. Некоторая сфера касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Найти радиус сферы.

15. (м/м-98.6) Дана пирамида $ABCD$. Сфера касается плоскостей DAB, DAC и DBC в точках K, L, и M соответственно. При этом точка K находится на стороне AB, точка L — на стороне AC, точка M — на стороне BC. Известно, что радиус сферы равен 3, $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle BDC = 105^\circ$, $\angle ADC = 75^\circ$. Найти объём пирамиды.

16. (м/м-99(1).6) Основание H высоты SH треугольной пирамиды $SABC$ принадлежит грани ABC, $SH = \sqrt{\frac{5}{21}}$, $SA = 1$, $SB = 2$, угол $\angle ASB = 120^\circ$, угол $\angle ACB = 60^\circ$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

17. (м/м-00(2).6) Параллельные плоскости α и β делят тетраэдр $ABCD$ на три части так, что объём средней части меньше объёмов каждой из крайних частей. Расстояние от точек A и B до плоскости α равны 15 и 10 соответственно. Расстояния от точек A и C до плоскости β равны 10 и 8 соответственно. Найти отношение площадей сечений тетраэдра плоскостями α и β, если известно, что одно из этих сечений — трапеция, а расстояние от точки D до плоскости α меньше 12.

18. (ВМиК-77.5) В пирамиде $SABC$ прямая, пересекающая рёбра AC и BS и перпендикулярная им, проходит через середину ребра BS.

Грань ASB равновелика грани BSC, а площадь грани ASC в два раза больше площади грани BSC. Внутри пирамиды есть точка M, сумма растояний от которой до вершин B и S равна сумме расстояний до всех граней пирамиды. Найти расстояние от точки M до вершины B, если $AC = \sqrt{6}$, а $BS = 1$.

19. (ВМиК-81.6) В пирамиде $SABC$ площадь грани ASB равна $\frac{3\sqrt{7}}{4}$, величина угла $\angle BCS$ равна $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{231}}{37}$, $AS = SB$, $SC \cdot AC = 20$. Известно, что перпендикуляры к граням, восстановленные из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке. Найти объём пирамиды $SABC$.

20. (ВМиК-87.6) В пирамиде $ABCD$ проведено сечение $KMLN$ так, что точка K лежит на ребре AD, точка M — на ребре DC, точка N — на ребре AB, точка L — на ребре BC, и O — точка пересечения диагоналей KL и MN четырёхугольника $KMLN$. Сечение $KMLN$ делит пирамиду на две части. Найти отношение объёмов этих частей, если известны следующие соотношения между длинами отрезков:

$$4 \cdot OL = 3 \cdot OK, \quad 25 \cdot ON = 24 \cdot OM, \quad DK \cdot NA - KA \cdot BN = KA \cdot NA.$$

21. (ВМиК-89.6) В пирамиде $SABC$ основание H высоты SH лежит на медиане CM основания ABC. Точка O, являющаяся серединой высоты SH, находится на одинаковом расстоянии от точки S, точки E, лежащей на ребре SA, и точки F, лежащей на ребре SB. Известно, что $SH = 8$, $AB = 16\sqrt{2}$, $EF = 8\sqrt{\frac{2}{5}}$, угол $\angle SMC$ не больше 30°, а расстояние между серединами рёбер AB и SC равно $4\sqrt{13}$. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

22. (ВМиК-94(1).6) В треугольной пирамиде $ABCD$ рёбра AD и BD перпендикулярны. На ребре AB взята точка M так, что квадрат суммы расстояний от вершин A, B, C до прямой DM равен удвоенной сумме квадратов длин рёбер AD, BD, CD. Известно, что $CD = 20$, а угол $\angle DAB = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{3}}$. Определить длину отрезка CM.

23. (ВМиК-97(1).6) Объём пирамиды $SABC$ равен V. Через точки M и N, лежащие на рёбрах AS и AB соответственно, и внутреннюю точку P грани ABC проведена плоскость, пересекающая прямую CS в точке L. Пусть D и E — точки пересечения прямых AP и BP, с рёбрами BC и AC соответственно. Известно, что $AN = NC$, $AM = MS$, $AP = 3 \cdot PD$ и $BP = 2 \cdot PE$. Найти объём пирамиды $ACLN$.

24. (физ-71.4) В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC. Середина D гипотенузы AB этого треугольника является основанием высоты SD данной пирамиды. Известно, что $SD = h$, $AC = b$, $BC =$ с. Через середину высоты SD проведено сечение плоскостью, параллельной рёбрам AC и SB. Найти площадь этого сечения и угол между плоскостью сечения и основанием пирамиды.

25. (физ-73.4) В треугольной пирамиде $SABC$ высота SO проходит через точку O — центр круга, вписанного в основание ABC пирамиды. Известно, что $\angle SAC = \frac{\pi}{3}$, $\angle SCA = \frac{\pi}{4}$, а отношение площади треугольника AOB к площади треугольника ABC равно $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$. Найти угол $\angle BSC$.

26. (физ-75.5) В треугольнике ABC угол $\angle ACB$ — прямой. $AC = a$, $BC = 3a$. Через точку B проведена в пространстве прямая, перпендикулярная отрезку BC, и на этой прямой взята точка D так, что $BD = a$. Двугранный угол между полуплоскостями, которым принадлежат треугольники BCD и ABC, равен $\frac{\pi}{3}$. Шар касается отрезка AB в такой точке P, что $AB = 3 \cdot AP$, и касается отрезка AB в такой точке Q, что $CD = 3 \cdot QD$. Найти радиус шара.

27. (физ-76.5) Все плоские углы трёхграннного угла $SABC$ (S — вершина) прямые. На грани ASC взята точка D на расстоянии 5 *см* от вершины S и на расстоянии 3 *см* от ребра SC. Из некоторой точки M, расположенной внутри трёхгранного угла $SABC$, в точку D направлен луч света. Луч образует угол $\frac{\pi}{4}$ с ребром SB и угол $\frac{\pi}{3}$ с ребром SC. Луч зеркально отражается от от гра-

ней угла $SABC$ сначала в точке D, затем — в точке E, затем — в точке F. Найти длину отрезка EF.

28. (физ-86.5) В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB взята точка M, делящая отрезок SB в отношении $3 : 5$, считая от точки S. Через точки A и M параллельно медиане BD треугольника ABC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды?

29. (физ-88.6) В треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) угол $\angle ACB$ — прямой, $AC = 3$, $BC = 4$, $SC = \sqrt{38}$. Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию ABC. В пирамиду вписан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна $\frac{8\pi}{3}$. Нижнее основание цилиндра находится в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания имеет ровно по одной общей точке с каждой из боковых граней пирамиды. Найти радиус основания цилиндра.

30. (физ-97.6) В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 7, 8, 9. Боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Найти высоту пирамиды.

31. (хим-87.4) Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. На ребре AS взята точка D, такая, что отрезок DB перпендикулярен ребру AS. Проекция O точки D на основание пирамиды лежит на отрезке AB и делит его в отношении $BO : OA = \lambda$. Найти разность объёмов пирамид $SABC$ и $DABC$, если известно, что угол $\angle ACS = 90°$, а $AD = b$.

32. (био-81.5) В треугольной пирамиде длины двух непересекающихся рёбер равны 12 и 4, а остальные рёбра имеют длину 7. В пирамиду вписана сфера. Найти расстояние от центра сферы до ребра длины 12.

33. (био-84.4) В треугольной пирамиде $SABC$ длины всех рёбер, пересекающихся с ребром BC, равны между собой и в $2,5$ раза больше длины этого ребра, равной b. Высота пирамиды, опущенная из вершины S на основание ABC, находится внутри пирамиды, и квадрат её длины в $4,5$ раза больше квадрата длины BC. Точка M делит пополам высоту грани SBC, проведённую из вершины

S к ребру BC. Через точки A и M проведена секущая плоскость, образующая с плоскостью основания пирамиды угол, величина которого равна $30°$. Какова площадь полной поверхности части пирамиды, отсекаемой этой плоскостью и содержащей вершину S, и сколько таких плоскостей можно построить?

34. (био-98.4) Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный ABC (C — вершина прямого угла). Все боковые грани пирамиды наклонены к её основанию под одинаковым углом, равным $\arcsin\frac{5}{13}$. Найти площадь боковой повехности пирамиды, если SO — высота пирамиды, $AO = 1$, $BO = 3\sqrt{2}$.

35. (почв-78.4) Плоскость прямоугольного треугольника, длины катетов которого равны 3 *см* и , 4 *см* образует с плоскостью P угол, величина которого равна α. Гипотенуза этого треугольника лежит в плоскости P. Найти величину угла, который образует меньший катет с плоскостью P.

36. (геогр-88.4) Треугольная пирамида $ABCD$ пересекается плоскостью P по четырёхугольнику $EFGH$ так, что вершины E и F лежат на рёбрах AB и AC и длина отрезка EF равна 1 *см*. Известно, что плоскость P параллельна противоположным рёбрам AD и BC, которые равны соответственно 4 *см* и 2 *см*. Найти периметр четырёухугольника $EFGH$.

37. (геогр-99(1).6) Дана треугольная пирамида, длины рёбер которой равны 15, 9, 9, 12, 12, 3. Найти радиус описанной вокруг пирамиды сферы и объём пирамиды.

38. (геогр-99.6) В пространстве заданы три луча DA, DB и DC, имеющие общее начало D, так, что $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = 90°$. Сфера пересекает луч DA в точках A_1 и A_2, луч DB — в точках B_1 и B_2, а луч DC — в точках D_1 и D_2. Найти площадь треугольника $A_2B_2C_2$, если площади треугольников DA_1B_1, DA_1C_1, DB_1C_1 и DA_2B_2 равны соответственно $\frac{15}{2}$, 10, 6 и 40.

39. (геол.ОГ-79.5) Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC, длина стороны которого равна $\sqrt{3}$. Основанием высоты, опущенной из вершины S, является точка O, лежащая внутри треугольника ABC. Расстояние от точки O до

стороны AC равно 1. Синус угла $\angle OBA$ относится к синусу угла $\angle OBC$ как $2:1$. Площадь грани SAB равна $\sqrt{\frac{5}{6}}$. Найти объём пирамиды.

40. (геол.ГФ-83.6) В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, в котором длины сторон AB и AC равны 1, а косинус угла $\angle BAC$ равен $\frac{4}{5}$. Ребро SA перпендикулярно рёбрам AB и AC, угол $\angle BAC$ вдвое больше угла $\angle BSC$. Внутри пирамиды находится прямой круговой цилиндр, образующая которого параллельна BC. Какова наибольшая возможная площадь боковой поверхности такого цилиндра?

41. (геол.ОГ-83.6) В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, длины сторон AB и AC равны $\sqrt{5}$, ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, угол $\angle BAC$ вдвое больше угла $\angle BSC$. Среди всех прямых круговых цилиндров с образующей, параллельной SA, и находящихся внутри пирамиды, рассматривается цилиндр с наибольшей площадью боковой поверхности. Известно, что расстояние от центра его нижнего основания до ребра BC составляет $\frac{11}{16}$ длины медианы AM треугольника $\triangle ABC$. Найти объём пирамиды $SABC$.

42. (геол.ГФ-84.6) У пирамиды $SABC$ длины рёбер AB и AC равны 1, длина ребра BC равна $\sqrt{3}$, а длина высоты SH равна 2. Основание H высоты находится на расстоянии 1 от вершины C, и $AH \perp AB$. Найти отношение площадей поверхностей вписанного в пирамиду и описанного вокруг пирамиды шаров.

43. (геол.ОГ-84.6) В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, у которого величина угла при вершине A равна $\frac{\pi}{4}$, а рёбра AC и AB имеют одинаковую длину $1+\sqrt{2}$. Основание H высоты SH пирамиды расположено так, что $CH \perp AB$, $BH \parallel AC$. Найти радиус описанного около пирамиды $SABC$ шара, если длина высоты SH равна $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

44. (экон.К-77.5) В треугольной пирамиде $SA_1A_2A_3$ на сторонах основания A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 выбраны соответственно точки K_1, K_2, K_3 так, что $A_1K_1 : K_1A_2 = A_2K_2 : K_2A_3 = A_3K_3 : K_3A_1 = 2$.

Через середину ребра SA_1 параллельно основанию пирамиды проведена плоскость π, которая пересекает отрезки SK_1, SK_2, SK_3 в точках L_1, L_2, L_3 соответственно. Треугольник $L_1L_2L_3$ принят за верхнее основание прямой призмы, нижнее основание которой лежит в плоскости основания пирамиды. Найти объём призмы, если объём пирамиды $SA_1A_2A_3$ равен V.

45. (экон-86.6) В пирамиде $SABC$ длины рёбер SC, BC и AC равны соответственно $\frac{1}{6}\sqrt{93}$, 3 и 4. Известно, что угол $\angle ABC$ тупой, ребро SC перпендикулярно к плоскости основания ABC, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\frac{8}{\sqrt{15}}$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S, точку пересечения медиан треугольника ABC и центр окружности, вписанной в этот треугольник.

46. (экон-92.4) В треугольной пирамиде $ABCD$ плоские углы $\angle BAC$, $\angle BAD$ и $\angle CAD$ при вершине A равны $\frac{\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$ соответственно. Определить угол между гранями BAD и CAD.

47. (экон-99.6) В треугольной пирамиде $SABC$ угол $\angle ABC = \alpha$ ребро $SC = d$ является диаметром сферы, пересекающей рёбра SA и SB в их серединах. Найти объём пирамиды, если $\angle SAC = \angle SBC = \beta$ причём $\beta < \frac{\pi}{4}$.

48. (псих-92.5) В тетраэдре $ABCD$ на ребре AB взята точка K, на ребре AC — точка L, на ребре BD — N, на ребре CD — M. Точки E, G — середины рёбер AD и BC соответственно. Прямые EG, KM, LN пересекаются в одной точке. Найти площадь четырёхугольника $KLMN$, если $AK : KB = 5$, $AD = 9$, $BC = 8$, а угол между скрещивающимися прямыми AD и BC равен $45°$.

§2. Тетраэдры со специальными свойствами.

Прежде, чем приступить к решению задач, ознакомимся со следующими *определениями*.

- **Определение 1.** Тетраэдр называется *правильным*, если все его рёбра равны. (см. рис.5.)

- **Определение 2.** Треугольная пирамида называется *правильной*, если основанием пирамиды является правильный треугольник, а ортогональная проекция вершины пирамиды на плоскость основания совпадает с центром треугольника, лежащего в основании. Все боковые грани правильной треугольной пирамиды — равные между собой равнобедреные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется *апофемой* этой пирамиды. (см. рис.6.)

- **Определение 3.** Тетраэдр называется *прямоугольным*, если все три плоских угла при какой либо его вершине прямые. (см. рис.7.)

- **Определение 4.** Тетраэдр называется *равногранным*, если все его грани равны (*то есть являются равными треугольниками*). (см. рис.7 и рис.8.)

- **Определение 5.** Тетраэдр называется *ортоцентрическим*, если все его высоты (*или их продолжения*) пересекаются в одной точке.

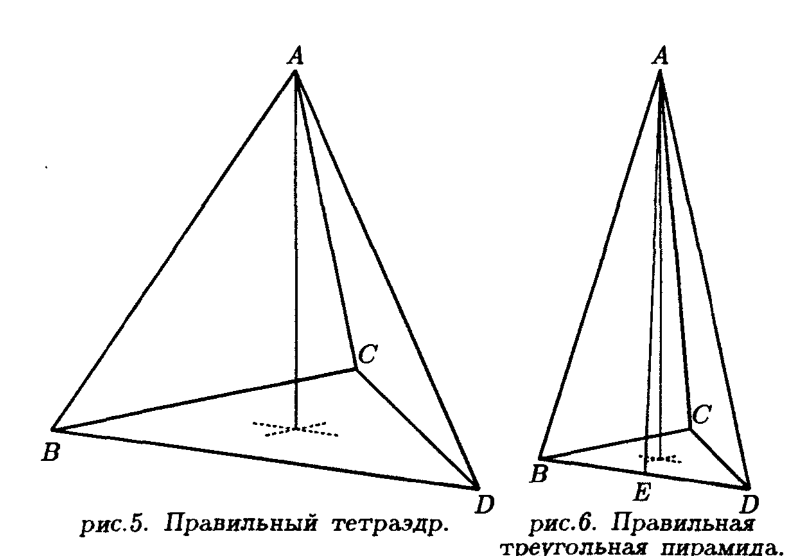


рис.5. Правильный тетраэдр.

рис.6. Правильная треугольная пирамида.

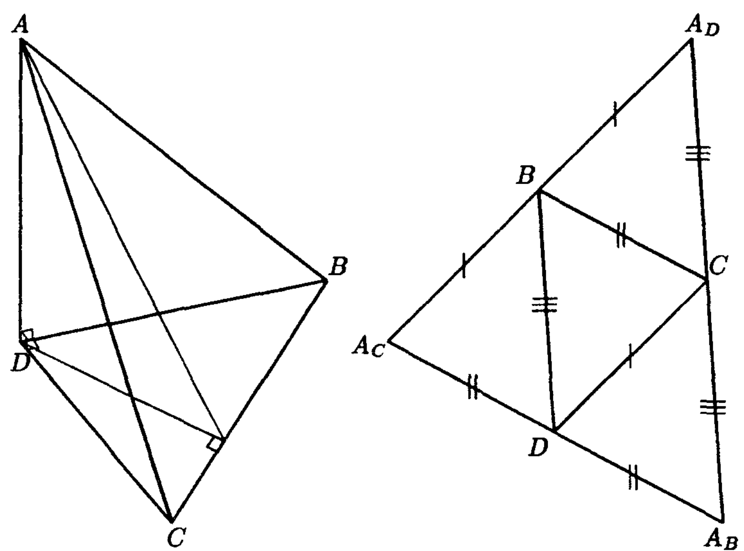


рис.7. Прямоугольный тетраэдр.

рис.8. Развёртка равногранного тетраэдра.

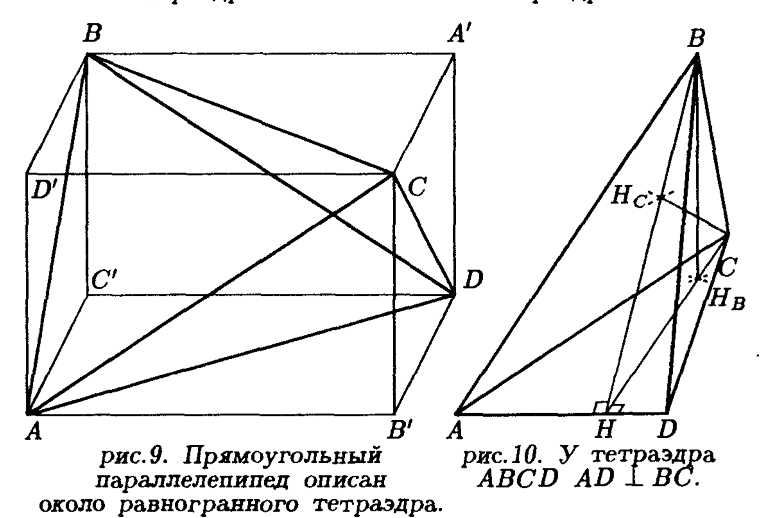


рис.9. Прямоугольный параллелепипед описан около равногранного тетраэдра.

рис.10. У тетраэдра $ABCD$ $AD \perp BC$.

Все формулы и утверждения, которые использовались для решения задач в предыдущем параграфе, могут пригодиться и в этом параграфе.

Первый раздел. Свойства специальных тетраэдров.

1. Длина ребра правильного тетраэдра равна a. Докажите, что:
а) каждая из его высот (медиан, биссектрис трёхгранных углов) равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$;
б) радиус R описанного около него шара равен $R = a\frac{\sqrt{6}}{4}$;
в) радиус r вписанного в него шара равен $r = a\frac{\sqrt{6}}{12}$;
г) объём V равен $V = a^3\frac{\sqrt{2}}{12}$.

2. Докажите, что в правильном тетраэдре угол между любым ребром и плоскость грани, которой оно не принадлежит, равен $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Докажите, что в правильном тетраэдре угол между плосостями любых двух граней равен $\arccos\frac{1}{3}$.

4. Докажите, что прямые, соединяющие середину высоты правильного тетраэдра с вершинами грани, на которую эта высота опущена, попарно перпендикулярны.

5. В тетраэдре $SABC$ $SA = SB = SC$ и сумма двугранных углов при рёбрах SA и SC равна $180°$. Докажите, что $AS = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2}$.

6. Сумма длин одной пары скрещивающихся рёбер тетраэдра равна сумме длин другой пары. Докажите, что сумма величин двугранных углов при первой паре рёбер равна сумме величин двугранных углов при второй паре.

7. Все грани тетраэдра — подобные между собой прямоугольные треугольники. Докажите, что отношение наибольшего ребра к наименьшему равно $\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^3$.

8. Сфера касается рёбер AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ в точках L, M, N и K, являющихся вершинами квадрата. Докажите, что если эта сфера касается ребра AC, то она касается и ребра BD.

9. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине D прямые. Пусть $\angle CAD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$ и $\angle ACB = \varphi$. Докажите, что $\cos\varphi = \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

10. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине D прямые, $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$. Докажите, что:

    1) все бимедианы имеют одну и ту же длину равную $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

    2) радиус R описанной около этого тетраэдра сферы равен $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

    3) площадь грани ABC равна $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$;

    4) выполнено соотношение $S^2_{\triangle ABC} = S^2_{\triangle ABD} + S^2_{\triangle ACD} + S^2_{\triangle BCD}$ ("теорема Пифагора" для прямоугольного тетраэдра);

    5) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, где h — высота тетраэдра, опущенная из вершины D;

    6) $\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, где d — расстояние до граней ABD, ACD, BCD от точки O, принадлежащей грани ABC и равноудалённой от остальных граней;

    7) $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$, где r — радиус вписанной в этот тетраэдр сферы.

11. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине A прямые и $AB = AC + AD$. Докажите, что сумма плоских углов при вершине B равна $90°$.

12. Три двугранных угла тетраэдра прямые. Докажите, что у этого тетраэдра есть три плоских прямых угла.

13. В тетраэдре три двугранных угла прямые. Одина из бимедиан равна a, а другая — b, причём $b > a$. Докажите, что длина наибольшего ребра тетраэдра равна $\sqrt{3a^2+b^2}$

14. Три двугранных угла тетраэдра, не принадлежащие одной вершине, равны 90°, а все остальные двугранные углы равны между собой. Докажите, что каждый из этих углов равен $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

15. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при рёбрах AB и CD равны; равны также двугранные углы при рёбрах BC и AD. Докажите, что $AB = CD$ и $AD = BC$.

16. Прямая, проходящая через центроид тетраэдра и центр его описанной сферы, пересекает рёбра AB и CD. Докажите, что $AC = BD$ и $AD = BC$.

17. Прямая, проходящая через центроид тетраэдра и центр его вписанной сферы, пересекает рёбра AB и CD. Докажите, что $AC = BD$ и $AD = BC$.

18. Докажите следующие необходимые и достаточные условия равногранности тетраэдра. Тетраэдр $ABCD$ является равногранным тогда и только тогда, когда:

1) его скрещивающиеся рёбра попарно равны;

2) сумма плоских углов при какой-либо его вершине равна 180°, и есть две пары попарно равных скрещивающихся рёбер:

3) есть две его вершины, суммы плоских углов при каждой из которых равны 180°, и ребро, соединяющее эти вершины, равно скрещивающемуся с ним ребру;

4) есть три его вершины, суммы плоских углов при каждой из которых равны 180°;

5) суммы длин ребер, выходящих из каждой его вершины, равны одному и тому же числу;

6) произведения длин ребер, выходящих из каждой его вершины, равны одному и тому же числу;

7) периметры его граней равны одному и тому же числу;

8) произведения длин ребер для каждой его грани равны одному и тому же числу;

9) описанный около него параллелепипед прямоугольный (см. рис.9.);

10) все его грани равновелики;

11) все его высоты равны между собой;

12) радиусы окружностей, описанных около его граней, равны между собой;

13) его бимедианы попарно перпендикулярны;

14) его бимедианы совпадают с бивысотами;

15) центры вписанной в него и описанной около него сфер совпадают;

16) центр описанной около него сферы совпадает с его центроидом;

17) центр вписанной в него сферы совпадает с его центроидом;

18) $\angle BAC = \angle ABD = \angle ACD = \angle BDC$;

19) все плоские углы трёхгранных углов O_aBCD, O_bACD, O_cABD и O_dABC — прямые, где O_a, O_b, O_c и O_d — центры вневписанных сфер, касающихся граней BCD, ACD, ABD и ABC соответственно.

19. Тетраэдр $ABCD$ равногранный, $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$. Докажите, что:

1) объём тетраэдра равен

$$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)};$$

2) радиус описанной около тетраэдра сферы равен

$$R = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2};$$

3) радиус вписанного в тетраэдр шара равен

$$r = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}.$$

20. Докажите, что в равногранном тетраэдре:

1) все плоские углы острые;

2) радиус вписанного в тетраэдр шара вдвое меньше радиуса вневписанного шара;

3) центры четырёх вневписанных шаров являются вершинами тетраэдра, равного исходному;

4) сумма косинусов двугранных углов равногранного тетраэдра равна 2;

5) основания высот, середины высот и точки пересечения высот граней принадлежат одной сфере. (Эту сферу называют *сферой двенадцати точек равногранного тетраэдра*).

21. В равногранном тетраэдре $ABCD$ опущена высота AH; H_1 — точка пересечения высот грани BCD; h_1 и h_2 — длины отрезков, на которые одна из высот грани BCD делится точкой H_1. Докажите, что:
а) точки H и H_1 симметричны относительно центра описанной около треугольника BCD окружности;
б) $AH^2 = 4h_1h_2$.

22. Дан тетраэдр $ABCD$, докажите, что:
а) если $AD \perp BC$, то высоты, опущенные из вершин B и C (а также высоты, опущенные из вершин A и D), пересекаются в одной точке, причём эта точка лежит на на общем перпендикуляре к AD и BC;
б) если высоты, опущенные из вершин B и C, пересекаются в одной точке, то $AD \perp BC$ (а значит, в одной точке пересекаются высоты, опущенные из вершин A и D).

23. Дан тетраэдр $ABCD$, точки K, L, M и N — середины рёбер AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что $AC \perp BD$ тогда и только тогда, когда $KM = LN$.

24. Докажите, что $BC \perp AD$ тогда и только тогда, когда основания высот, опущенных из вершин A и D на прямую BC, совпадают (а значит, совпадают основания высот, опущенных из вершин B и C на прямую AD). (см. рис.10.)

25. Докажите следующие необходимые и достаточные условия ортоцентричности тетраэдра. Тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда:
1) любое его рёбро перпендикулярно ребру, скрещивающемуся с ним;
2) проекция одной из его вершин на противоположную грань совпадает с точкой пересечения высот (или их продолжений) этой грани;
3) грани описанного около него параллелепипеда являются ромбами;
4) его бимедианы одинаковы по длине;
5) суммы квадратов длин скрещивающихся рёбер равны одному и тому же числу;
6) произведения косинусов двугранных углов при любых двух скрещивающихся рёбрах равны одному и тому же числу;

7) две его пары скрещивающихся рёбер попарно перпендикулярны (сравните с критерием 1);
8) углы между скрещивающимися рёбрами равны между собой (сравните с критерием 1).

26. Докажите, что прямоугольный тетраэдр является ортоцентрическим.

27. Докажите, что любая правильная треугольная пирамида является ортоцентрическим тетраэдром.

28. Докажите, что окружности девяти точек треугольников ABC и DBC принадлежат одной сфере тогда и только тогда, когда $BC \perp AD$. (**Определение**. *Окружностью девяти точек треугольника* называется окружность, проходящая через середины сторон этого треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот треугольника с его вершинами. То, что эти 9 точек лежат на одной окружности, следует доказать отдельно.)

29. Докажите, что, если $AD \perp BC$, то сфера, содержащая окружности девяти точек граней ABC и DBC, и сфера, содержащая окружности девяти точек граней ABD и ACD, пересекаются по окружности, лежащей в плоскости, которая делит пополам общий перпендикуляр к BC и AD и ему перпендикулярна.

30. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре:
1) все плоские углы при одной вершине одновременно либо острые, либо прямые, либо тупые;
2) одна из граней — остроугольный треугольник;
3) общие перпендикуляры к парам скрещивающихся рёбер пересекаются в одной точке;
4) сумма квадратов длин любых двух скрещивающихся рёбер в четыре раза больше квадрата длины любой его бимедианы;
5) выполняется соотношение $OH^2 = 4R^2 - 3d^2$, где O — центр описанной сферы, H — точка пересечения высот, R — радиус описанной около заданного тетраэдра сферы, d — расстояние между серединами противоположных рёбер;
6) окружности девяти точек всех четырёх граней лежат на одной сфере (эту сферу называют *сферой двадцати четырёх точек*).

7) точки пресечения медиан граней, точки пересечения высот граней, а также точки, делящие отрезки, соединяющие точку пересечения высот с вершинами, в отношении $2:1$, считая от вершины, лежат на одной сфере (эту сферу называют *сферой двенадцати точек ортоцентрического тетраэдра*);
8) $HM_1 : M_1N = 1:2$, где H — точка пересечения высот, M_1 — точка пересечения медиан какой-либо из граней, N — точка пересечения луча HM_1 с описанной сферой тетраэдра;
9) $H_1M : MN = 1:3$, где M — точка пересечения медиан тетраэдра, H_1 — точка пересечения высот какой-либо из граней, N — точка пересечения луча H_1M с описанной сферой тетраэдра;
10) точка Монжа совпадает с точкой пересечения высот (следует доказать, что шесть плоскостей, проведённых через середины рёбер перпендикулярно скрещивающемуся ребру, пересекаются в одной точке, которая и называется *точкой Монжа*).

Второй раздел. Конкурсные задачи.

1. (м/м-75.4) В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с вершиной S и основанием ABC вписан шар единичного радиуса; двугранный угол между основанием пирамиды и боковой гранью равен 60°. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая рёбра основания AB и BC в некоторых точках M и N, таких, что $MN = 5$, касающаяся шара в точке, удалённой на равные расстояния от точек M и N, и пересекающая продолжение высоты пирамиды SK за точку K в некоторой точке D. Найти длину отрезка SD.

2. (м/м-90.6) В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$, и $SA = SB = SC = \sqrt{7}$. В трёхгранный угол при вершине C вписана сфера S_1. Сфера S_2, радиус которой втрое больше, чем у сферы S_1, касается сферы S_1, плоскостей SAC и ABC. При этом отрезок прямой SB, заключённый внутри сферы S_2, имеет длину $\frac{6}{\sqrt{7}}$. Найти радиус сферы S_2.

3. (м/м-96.5) В треугольной пирамиде $AKLM$ выполнено $AK = AL = AM$, $KL = LM = MK$, $\operatorname{tg}\angle AKM = \frac{7}{\sqrt{3}}$. Сфера радиу-

са $2\sqrt{3}$ касается луча LA, касается плоскости AKM и касается плоскости KLM в точке, лежащей на луче LM. Найти наибольшее возможное значение длины отрезка LM.

4. (м/м-98(1).5) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ длины всех рёбер равны $2+\sqrt{2}$. Сфера касается плоскости $ABCD$, а также касается рёбер SA, SB, SC и SD пирамиды в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. На ребре SA взята точка E. Через точки E, D_1 и B_1 проведена плоскость, пересекающая ребро SA в точке F. Найти длину отрезка SE, при которой площадь проекции четырёхугольника ED_1FB_1 на плоскость $ABCD$ равна $\frac{4}{3}$.

5. (ВМиК-74.5) В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине B и C равны $180°$ и $SA = BC$. Найти объём пирамиды, если площадь грани SBC равна 100 *см*^{2}, а расстояние от центра описанного шара до плоскости основания ABC равно 3 *см*.

6. (ВМиК-75.5) Все ребра треугольной пирамиды $ABCD$ касаются некоторого шара, три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся ребер CD и AB, BD и AC, AD и BC, равны между собой. Угол $\angle ABC$ равен $100°$. Найти отношение высот пирамиды, опущенных из вершин A и B.

7. (ВМиК-80.6) В пирамиде $SABC$ суммы длин ребер, выходящих из каждой вершины, равны одному и тому же числу. Величина тупого угла между рёбрами SB и AC равна $\arccos(-\frac{1}{3})$, радиус вписанной в пирамиду сферы равен $\sqrt{\frac{3}{13}}$ и $SA^2+SC^2=12$. Найти объём пирамиды, если известно, что он не превосходит $\frac{5}{3}$.

8. (ВМиК-85.6) Все ребра тетраэдра $ABCD$ имеют равную длину. На ребрах AB, AC и AD выбраны соответственно точки K, L и M так, что длина отрезка KB равна 15, а длина отрезка MD равна 10. Известно, что радиус шара, вписанного в тетраэдр $ABCD$, равен $\frac{5\sqrt{6}}{2}$, а объем пирамиды $AKLM$ равен $375\sqrt{2}$. Найти сумму радиусов двух шаров: вписанного в пирамиду $AKLM$ и описанного около неё.

9. (ВМиК-94.6) Все высоты пирамиды $ABCD$, грани которой являются остроугольными треугольниками, равны между собой. Известно, что $AB = 9$, $BC = 13$, а угол $\angle ADC = 60°$. Найти длину ребра BD.

10. (ВМиК-95(1).6) В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с параллельными гранями $ABCD$ и $A'B'C'D'$ длина ребра равна 9. Через точки M, N и K, расположенные на рёбрах BC, CD и CC' соответственно, проведена плоскость. Известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник MCK, равен 1, площадь треугольника MNC равна $\frac{21}{2}$, разность длин отрезков CN и CK равна 3 и объём пирамиды $MNCK$ меньше 15. Найти радиус сферы, касающейся плоскости треугольника MNK и трёх граней куба с общей точкой A'.

11. (ВМиК-96(1).6) Сфера с центром в точке O проходит через вершины A, B и C треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает прямые AD, BD и CD в точках K, L и M соответственно. Известно, что $AD = 10$, $BC : BD = 3 : 2$ и $AB : CD = 4\sqrt{3} : 11$. Проекциями точки O на плоскости ABD, BCD и CAD являются середины рёбер AB, BC и AC соответственно. Расстояние между серединами рёбер AB и CD равно 13. Найти периметр треугольника KLM.

12. (ВМиК-98.4) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S проведена высота SD. На отрезке SD взята точка K так, что $SK : KD = 1 : 2$. Известно, что двугранные углы между основанием и боковыми гранями равны $\frac{\pi}{6}$, а расстояние от точки K до бокового ребра равно $\frac{4}{\sqrt{13}}$. Найти объём пирамиды.

13. (физ-70.4) В треугольной пирамиде $SABC$ все рёбра равны друг другу. На ребре SA взята точка M, такая, что $SM = MA$, на ребре SB точка N, такая, что $3 \cdot SN = SB$. Через точки M и N проведена плоскость, параллельная медиане AD основания ABC. Найти отношение объёма треугольной пирамиды, отсекаемой от исходной проведённой плоскостью, к объёму пирамиды $SABC$.

14. (физ-71.4) В правильную треугольную пирамиду $SABC$ все рёбра которой равны a, вписана сфера. На ребре SA взята точка M

так, что $AM = MS$, а на ребре BC взята точка N так, что $2CN = NB$. Прямая MN пересекает сферу в двух точках P и Q. Найти длину отрезка PQ.

15. (физ-74.5) Даны две треугольные пирамиды $SABC$ и $NKLM$, все рёбра которых равна a. Эти пирамиды имеют общую высоту SN (S — центр грани KLM и N — центр грани ABC). Кроме того, $KL \parallel BC$ и пирамиды расположены так, что плоскость, проходящая через KL и BC, пересекает отрезок SN. Найти объём общей части пирамид $SABC$ и $NKLM$.

16. (физ-78.5.Н) Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ (D — вершина, ABC — основание). Известно, что $AB = a$, $AD = b$. Пирамиду пересекает плоскость α, параллельная рёбрам AD и BC. На каком расстоянии от ребра AD должна быть проведена плоскость α, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была наибольшей?

17. (физ-78.5.С) Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ (D — вершина, ABC — основание). Известно, что $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Пирамиду пересекает плоскость, параллельная рёбрам AD и BC и отстоящая на расстоянии d от ребра AD. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

18. (физ-82.5) На боковом ребре SA правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S взята точка D, через которую проведено сечение пирамиды, пересекающее апофемы граней SAC и SAB в точках M и N. Известно, что прямые DM и DN образуют углы величиной β с плоскостью основания пирамиды, а величины углов $\angle DMS$ и $\angle DNS$ равны α ($\alpha < \frac{\pi}{2}$). Найти величину угла $\angle MDN$.

19. (физ-84.5) Куб целиком находится в правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S так, что одна грань куба принадлежит основанию пирамиды, одно ребро целиком принадлежит грани SBC, а грани SAB и SAC содержат по одной вершине куба. Известно, что длина ребра AB в k раз больше длины высоты пирамиды. Найти отношение объёмов пирамиды и куба.

20. (физ-89.4) В правильной треугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к стороне основания пирамиды.

В правильной треугольной пирамиде $SPQR$ отношение высоты QT основания PQR к апофеме пирамиды равно k. Конус с вершиной Q и образующей QT касается своей боковой поверхностью основания PQR и боковых граней PSQ и RSQ пирамиды. Найти:

1) отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания пирамиды,

2) в каких границах может изменяться это отношение при изменении k,

3) при каких k основание конуса имеет точки, находящиеся вне пирамиды?

21. (физ-94.8) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α, сторона основания равна a, SH — высота пирамиды. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно рёбрам SA и BC.

22. (физ-95(1).6) В правильной треугольной пирамиде угол при вершине между двумя боковыми рёбрами равен β. Найти двугранный угол ребре основания пирамиды.

23. (физ-95(2).8) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ проведено сечение плоскостью, проходящей через точки B и C и делящей ребро SA в отношении $m : n$, считая от вершины S. Известно, что объём пирамиды $SABC$ равен V, а рсстояние от центра основания ABC до плоскости сечения равно d. Найти площадь сечения.

24. (хим-73.4) В правильной треугольной пирамиде расположен шар радиуса 1. В точке, делящей пополам высоту пирамиды, он касается внешним образом полушара. Полушар опирается на круг, вписанный в основание пирамиды. Шар касается боковых граней пирамиды. Найти площадь боковой поверхности пирамиды и величину двугранного угла, образованного боковыми гранями пирамиды.

25. (хим-74.5) На основании правильной треугольной пирамиды с высотой H и радиусом круга, вписанного в основание, равным r, лежит шар, касающийся основания пирамиды в его центре. Найти радиус шара, если плоскость, проведённая через вершину пирамиды и середины двух сторон основания, касается этого шара.

26. (хим-84.4) В правильную треугольную пираимду $SABC$ с вершиной S, у которой длина бокового ребра в $\sqrt{2}$ раз меньше длины ребра основания, вписана правильная треугольная пирамида $S'A'B'C'$, у которой длины всех рёбер равны между собой. При этом вершина S' лежит в плоскости ABC а вершины A', B', C' лежат на трёх апофемах боковых граней пирамиды $SABC$. Доказать, что вершина S' лежит в точке пересечения медиан треугольника ABC, и найти отношение площадей полных поверхностей этих пирамид.

27. (почв-82.5) Длина высоты SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна 1, а длины сторон основания ABC равны $2\sqrt{6}$. Точки M и N — середины отрезков AC и AB. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду $SAMN$.

28. (геогр-83.5) Каждое из рёбер треугольной пирамиды $ABCD$ имеет длину 1. Точка P на ребре AB, точка Q на ребре BC и точка R на ребре CD взяты так, что длина отрезка AP равна $\frac{1}{2}$, длина отрезка BQ равна $\frac{1}{3}$ и длина отрезка CR равна $\frac{1}{3}$. Плоскость PQR пересекает прямую AD в точке S. Найти величину угла между прямыми SP и SQ.

29. (экон.К-70.1) В правильный тетраэдр $ABCD$ вписан шар K. Из точки D на грань ABC тетраэдра $ABCD$ опущена высота DE. Точка P является серединой отрезка DE. Через точку P проведена плоскость M перпендикулярно к DE. Из всех точек, которые принадлежат одновременно шару K и плоскости M, взята точка O, являющаяся ближайшей к точке A. Найти расстояние от точки O до грани ABD, если объём шара K равен 1.

30. (экон.К-76.4) Основание ABC треугольной пирамиды $SABC$ является прямоугольным треугольником площадью в $16\,м^2$; угол $\angle ACB$ — прямой. Ребро SC перпендикулярно основанию ABC и равно $0,9\,м$. Какова наименьшая возможная при этих условиях площадь грани ASB?

31. (экон.В-99.5) В пирамиде $SABC$ основанием является правильный треугольник ABC, а все боковые рёбра равны между собой. Сфера диаметром $SC = d$ пересекает рёбра SA и SB в их серединах. Найти объём пирамиды.

32. (псих-70.4) В павильную треугольную пирамиду помещены три шара так, что первый шар касается всех боковых граней пирамиды и второго шара, второй шар касается боковых граней пирамиды и третьего шара, а третий шар касается боковых граней, основания пирамиды и второго шара. Какую долю объёма пирамиды занимают три шара, если её боковые грани наклонены к основанию под углом α?

33. (псих-79.4.Н) В треугольной пирамиде $ABCD$ длины всех рёбер равны. Точка P равноудалена от вершин A и D, а от вершин B и C находится на расстоянии $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Известно, что прямая PC перпендикулярна высоте треугольника ACD, опущенной из вершины D. Вычислить объём пирамиды $ABCD$.

34. (псих-79.4.С) В треугольной пирамиде $ABCD$ длины всех рёбер равны. Точка M лежит вне пирамиды, причём $MD = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$, $MA = MB = MC = \sqrt{\frac{97}{75}}$. Вычислить объём пирамиды $ABCD$.

35. (филол-74.5) В правильную треугольную пирамиду с плоским углом α при вершине вписана правильная треугольная призма так, что нижнее основание призмы лежит на основании пирамиды, а верхнее основание совпадает с сечением пирамиды плоскостью, проходящей через верхнее основание призмы. Длина бокового ребра призмы равна длине стороны основания призмы. Найти отношение объёмов призмы и пирамиды.

36. (филол-75.5) В правильную треугольную пирамиду с длиной ребра основания a и двугранным углом при основании равным $60°$, вложено три шара одинакового радиуса так, что каждый шар касается двух других, плоскости основания и только одной боковой грани пирамиды в точке, лежащей на биссектрисе этой грани, проведённой из вершины пирамиды. Найти радиус r отдельного шара.

§3. Пирамиды, призмы и другие многогранники.

Напомним основные **определения**. Обратите внимание, что определения даются в расширенном виде, содержат названия элементов фигур, формулировки простейших, приводимых без доказательств, свойств.

- **Определение 1.** *Многогранником* называется фигура, ограниченная в пространстве конечным числом плоскостей.

- **Определение 2.** *N-гранным углом* называется фигура в пространстве, составленная из n плоских углов с общей вершиной, не лежащих в одной плоскости, каждый двугранный угол имеет общие стороны с двумя другими плоскими углами, и нет стороны, общей для трёх плоских углов. Эти плоские углы называются *гранями* n-гранного угла, а их стороны — *рёбрами*. Общая вершина плоских углов называется *вершиной* n-гранного угла. Двугранные углы, образованные продолжениями граней до полуплоскостей, называются *двугранными углами n-гранного угла.*

- **Определение 3.** *N-угольной призмой* называется многогранник, две грани которого — равные выпуклые n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней — параллелограммы. Пару равных n-угольников называют *основаниями* призмы. Остальные грани призмы называют её *боковыми гранями*, а их объединение — *боковой поверхностью* призмы. Стороны граней призмы называются *рёбрами*, а концы рёбер — *вершинами* призмы. Рёбра, не лежащие в основании призмы. называются *боковыми рёбрами*. Отрезок любой прямой, перпендикулярной основаниям призмы, заключённый между этими основаниями, называется *высотой* призмы. N-угольник, вершинами которого являются точки пересечения плоскости, перпендикулярной боковым рёбрам призмы, называется *перпендикулярным сечением призмы*. В общем случае n-угольную призму будем обозначать как $A_1 \ldots A_n A'_1 \ldots A'_n$, причём $A_i A'_i$, где $i = \overline{1, n}$, — боковые рёбра призмы. **Замечание:** иногда призму называют *наклонной призмой*, чтобы отличать е ё от частного случая прямой призмы (смотри следующее определение).

- **Определение 4.** Призма называется *прямой*, если её боковые рёбра перпендикулярны основаниям.

- **Определение 5.** Прямая призма называется *правильной*, если её основаниями являются правильные многоугольники.

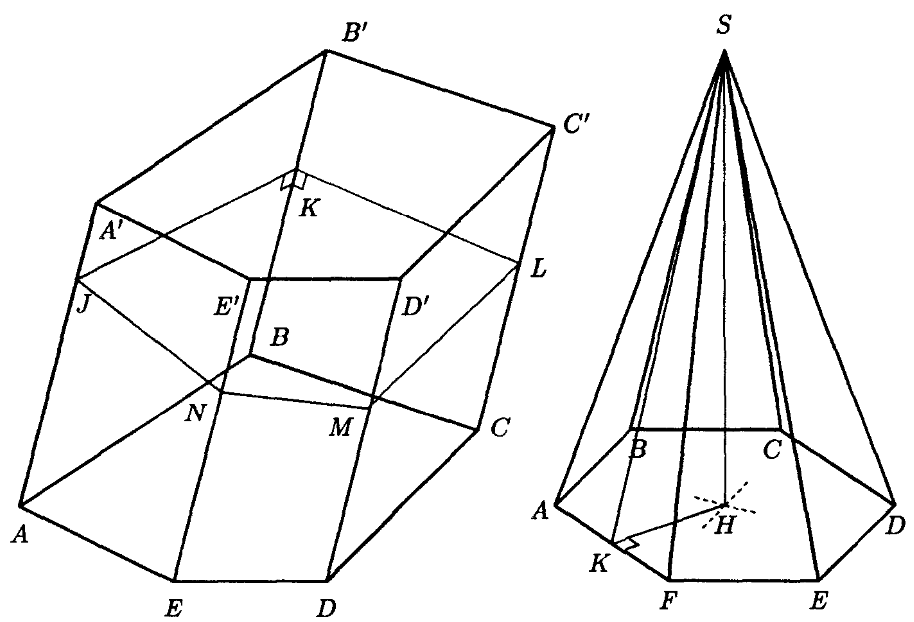


рис.11. Пятиугольная призма и её перпендикулярное сечение

рис.12. Правильная шестиугольная пирамида.

- **Определение 6.** *Параллелепипедом* называется призма, основаниями которой служат параллелограммы.

- **Определение 7.** Прямой параллелепипед, основаниями которого служат прямоугольники, называется *прямоугольным.*

- **Определение 8.** Прямоугольный параллелепипед с равными рёбрами называется кубом.

- **Определение 9.** Многогранник, одна из граней которого выпуклый n-угольник, а остальные — треугольники, имеющие одну общую вершину, называется *n-угольной пирамидой.* N-угольник называется *основанием пирамиды*, а остальные грани (треугольники) называются *боковыми гранями* пирамиды. Стороны граней пи-

рамиды называются *рёбрами*, а концы рёбер — *вершинами* пирамиды. Рёбра, не лежащие в основании призмы. называются *боковыми рёбрами*, остальные рёбра называются *рёбрами основания*. Общая вершина всех броковых граней (треугольников) называется *вершиной пирамиды*. В общем случае n-угольную пирамиду будем обозначать как $SA_1A_2\ldots A_n$, причём SA_i, где $i=\overline{1,n}$, — боковые рёбра пирамиды.

- **Определение 10.** Пирамида называется *правильной*, если основанием пирамиды является правильный многоугольник, а ортогональная проекция вершины пирамиды на плоскость основания совпадает с центром основания. Все боковые грани правильной пирамиды — равные между собой равнобедреные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется *апофемой* этой пирамиды.

- **Определение 11.** Многогранник, вершинами которого являются вершины основания некоторой пирамиды и точки пересечения её боковых рёбер некоторой плоскостью, параллельной основанию пирамиды, называется *усечённной пирамидой*. Основания усечённой пирамиды — гомотетичные многоугольники (центр гомотетии — вершина пирамиды). Отрезок любой прямой, перпендикулярной основаниям усечённой пирамиды, заключённый между этими основаниями, называется *высотой* усечённой пирамиды. Боковые грани усечённой пирамиды — трапеции.

- **Определение 12.** Усечённая пирамида называется *правильной*, если она является частью правильной пирамиды. Боковые грани правильной усечённой пирамиды — равные между собой равнобочные трапеции. Высота каждой из таких трапеций называется *апофемой* правильной усечённой пирамиды.

Сформумируем без доказательства некоторые простые **увержденния и теоремы**.

- **Утверждение 1.** Площадь боковой поверхности призмы $S_{\text{бок}}$ вычисляется по формуле $S_{\text{бок}} = P_{\text{перп}}|A_iA_i'|$, где $P_{\text{перп}}$ — периметр перпендикулярного сечения призмы, а $|A_iA_i'|$ — длина (любого) её бокового ребра.
  Замечание: для прямой призмы $P_{\text{перп}}$ равен периметру (любого) из её оснований.

- **Утверждение 2.** Объём наклонной призмы V вычисляется по формуле $V = S_{\text{перп}}|A_iA_i'|$, где $S_{\text{перп}}$ — площадь перпендикулярного сечения призмы, а $|A_iA_i'|$ — длина (любого) её бокового ребра, или по формуле $V = S_{\text{осн}}H$, где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания призмы, а H — высота призмы.

  Замечание: указанные формулы справедливы и для прямой призмы, следует учитывать только, что в этом случае $S_{\text{осн}} = S_{\text{перп}}$ и $H = |A_iA_i'|$.

- **Теорема (свойства параллелепипеда)**

  1) Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

  2) Середина диагонали параллелепипеда является его центром симметрии.

  3) Противоположные грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.

- **Утверждение 3.** Объём прямоугольного параллелепипеда V вычисляется по формуле $V = abc$, где a, b, c — длины трёх рёбер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины.

  Замечание: объём куба вычисляется по формуле $V = a^3$.

- **Утверждение 4.** Площадь боковой поверхности правильной пирамиды S вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}Ph$, где P — периметр основания пирамиды, а h — апофема.

- **Утверждение 5.** Объём пирамиды V вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}SH$, где S — площадь основания пирамиды, а H — высота прирамиды.

- **Утверждение 6.** Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды S вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}(P+p)h$, где P и p — периметры оснований пирамиды, а h — апофема.

- **Утверждение 7.** Объём усечённой пирамиды V вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$, где H — высота усечённой прирамиды, а S_1 и S_2 — площади оснований усечённой пирамиды.

Все формулы и утверждения, которые использовались для решения задач в предыдущих параграфах, могут пригодиться и в этом параграфе.

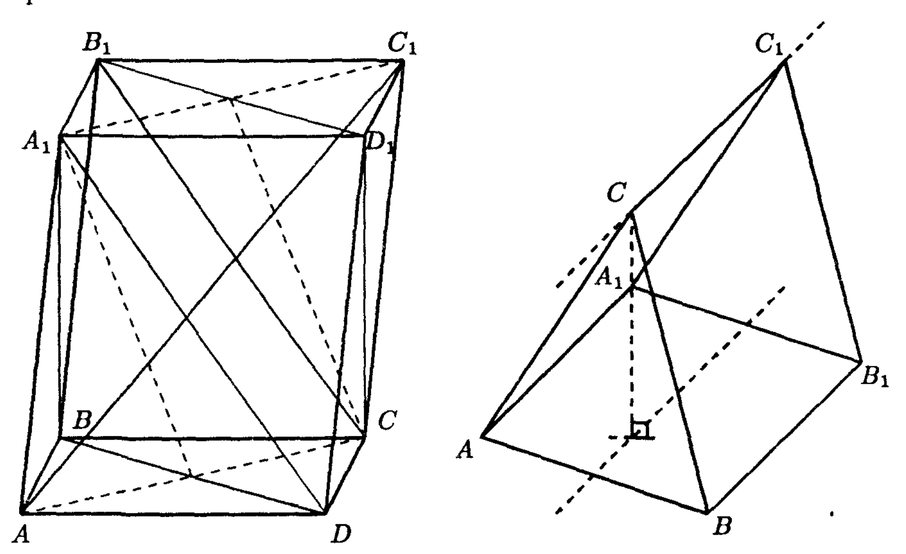


рис.13. Сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостями (A_1BD) и (B_1CD_1)

рис.14. Треугольная призма.

Первый раздел. Подготовительные задачи.

1. Плоскости боковых граней треугольной пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы. Докажите, что проекция вершины на плоскость основания является центром вписанной или вневписанной окружности основания.

2. Докажите, что объём треугольной пирамиды, у которой двугранные углы при рёбрах основания равны α, а длины рёбер основания равны a, b и c, равен

$$(p-a)(p-b)(p-c)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3},$$

где p — полупериметр основания.

3. На основании треугольной пирамиды $SABC$ взята точка M и через неё проведены прямые, параллельные рёбрам SA, SB и SC и пересекающие боковые грани в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что
$$\frac{MA_1}{SA} + \frac{MB_1}{SB} + \frac{MC_1}{SC} = 1.$$

4. Вершина S треугольной пирамиды $SABC$ совпадает с вершиной конуса, а точки A, B и C лежат на окружности его основания. Двугранные углы при рёбрах SA, SB и SC равны α, β и γ соответственно. Докажите, что угол между плоскостью SBC и плоскостью, касающейся поверхности конуса по образующей SC, равен $\dfrac{\pi + \alpha - \beta - \gamma}{2}$.

5. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат по одну сторону от плоскости треугольника ABC, при этом прямые AA_1, BB_1 и CC_1 перпендикулярны плоскости ABC, а длины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 равны длинам высот треугольника ABC, опущенным соответственно из вершин A, B и C. Радиус окружности, вписанной в треугольник ABC равен r. Точка M — пересечение плоскостей A_1BC, AB_1C и ABC_1. Точка N – пересечение плоскостей A_1B_1C, A_1BC_1 и AB_1C_1. Докажите, что:

   а) расстояние от точки M до плоскости ABC равно r;

   в) расстояние от точки N до плоскости ABC равно $2r$.

6. В правильную усечённую четырёхугольную пирамиду с высотой боковой грани a можно вписать шар. Докажите, что площадь её боковой поверхности равна $4a^2$.

7. Через точку M основания правильной n-угольной пирамиды проведён перпендикуляр, пересекающий плоскости боковых граней в точках M_1, M_2, ..., M_n. Докажите, что сумма длин отрезков MM_1, MM_2, ..., MM_n не зависит от выбора точки M.

8. Шар вписан в n-угольную пирамиду. Боковые грани поворачиваются вокруг рёбер основания и кладутся в плоскость основания так, что они лежат по одну сторону от соответствующих рёбер

вместе с основанием. Докажите, что вершины этих граней, отличные от вершин основания, лежат на одной окружности.

9. Из вершин основания вписанной пирамиды, плоские углы которой при вершине не прямые, в боковых гранях проведены высоты. Докажите, что прямые, проходящие через основания высот в каждой грани, параллельны одной плоскости.

10. В основании пирамиды с вершиной S лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что её боковые рёбра образуют равные углы с некоторым лучом SO, лежащим внутри четырёхгранного угла $SABCD$, тогда и только тогда, когда $SA+SC=SB+SD$.

11. Основанием усечённой четырёхугольной пирамиды $ABCD$ $A_1B_1C_1D_1$ являются параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что любая прямая, пересекающая три из четырёх прямых AB_1, BC_1, CD_1 и DA_1, пересекает и четвёртую прямую или параллельна ей.

12. Докажите, что площадь полной поверхности призмы, описанной около сферы, равна $6S$, где S — площадь основания призмы.

13. На боковых рёбрах BB_1 и CC_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты точки P и P_1 так, что $BP:PB_1=C_1P_1:P_1C=1:2$. Докажите, что

    а) двугранные углы при рёбрах AP_1 и A_1P тетраэдра AA_1PP_1 — прямые,

    б) сумма двугранных углов при рёбрах AP, PP_1 и P_1A_1 тетраэдра AA_1PP_1 равна $180°$.

14. Докажите, что в любом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$

    а) плоскость BDA_1 параллельна плоскости B_1D_1C,

    б) эти плоскости делят отрезок AC_1 на три равные части,

    в) эти плоскости делят объём параллелепипеда в отношении $1:4:1$.

15. Докажите, что объём треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен полупроизведению площади грани ABB_1A_1 на расстояние от прямой CC_1 до плоскости ABA_1.

16. Докажите, что угол CA_1D_1 в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

17. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Расстояние между прямыми A_1C_1 и B_1C равно d. Докажите, что объём куба равен $3\sqrt{3}d^3$.

18. Гранями параллелепипеда являются ромбы, длины рёбер которых равны a, а острые углы — α. Докажите, что объём параллелепипеда равен $2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$.

19. В основании четырёхугольной призмы лежит ромб со стороной a и острым углом α, а боковые рёбра призмы равны b и наклонены к плоскости основания под углом β. Докажите, что объём призмы равен $a^2b\sin\alpha\sin\beta$.

20. В наклонной треугольной призме длины боковых рёбер равны 8 *см*; стороны перпендикулярного сечения относятся как $9 : 10 : 17$, а его площадь равна 144 *см*^{2}. Докажите, что площадь боковой поверхности этой призмы равна 576 *см*^{2}.

21. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром равным 4, расстояние от середины ребра CD до плоскости A_1C_1M, где M — середина ребра DD_1, равно $\sqrt{6}$.

22. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром равным a, расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через вершины A_1, B, D равно $a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

23. Углы, образуемые диагональю прямоугольного параллелепипеда с его гранями, пересекающимися в одной из его вершин, равны α, β, γ. Докажите, что

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1.$$

24. В прямоугольном параллелепипеде угол между диагональю основания и его стороной равен α. Диагональ параллелепипеда равна d и образует с плоскостью основания угол φ. Докажите, что площадь боковой поверхности параллелепипеда равна $\sqrt{2}d^2\sin 2\varphi\cos(45^\circ - \alpha)$.

25. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β. Докажите, что угол между этими диагоналями равен $\arccos(\sin\alpha\sin\beta)$.

26. Через середину диагонали куба перпендикулярно к ней проведена плоскость. Докажите, что в сечении получается правильный шестиугольник и найдите его площадь при условии что ребро куба равно a.

27. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) через середины рёбер DD_1 и D_1C_1 и вершину A проведена плоскость. Докажите, что угол между этой плоскостью и гранью $ABCD$ равен $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

28. На ребре BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) взята точка F так, что $B_1F = \dfrac{1}{3}BB_1$, на ребре C_1D_1 — точка E так, что $D_1E = \dfrac{1}{3}C_1D_1$. Докажите, что наибольшее значение, которое может принимать отношение $\dfrac{AP}{PQ}$, где точка P лежит на луче DE, а точка Q — на прямой A_1F, равно $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

Второй раздел. Конкурсные задачи.

1. (м/м-71.3) Основание четырёхугольной пирамиды — квадрат, а все боковые грани — прямоугольные треугольники, у которых вершины прямых углов лежат на основании пирамиды. Найти объём пирамиды, если её высота равна 1, а один из двугранных углов при её вершине равен 120°.

2. (м/м-75.4) Сфера радиуса $\dfrac{3}{8}$ вписана в четырёхугольную пирамиду $SABCD$, у которой основанием служит ромб $ABCD$, такой, что угол $\angle BAD = 60^\circ$, высота пирамиды, равная 1, проходит через точку K пересечения диоганалей ромба. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая рёбра основания AB и

AD в некоторых точках M, N, таких, что $MN = \frac{4\sqrt{3}}{5}$, касающаяся сферы в точке, удалённой на равные расстояния от точек M и N, и пересекающая продолжение отрезка SK за точку K в некоторой точке E. Найти длину отрезка SE.

3. (м/м-81.5) На одной из граней двугранного угла с ребром AD лежит точка B, на другой — C. Отрезок DE параллелен плоскости треугольника ABC. В пирамиду $BCDE$ вписан шар. Отношение расстояния от его центра до прямой DE к расстоянию от прямой DE до плоскости (ABC) равно k. Пусть точка B' — проекция точки B на плоскость (CDE). Известно, что $\text{tg}\angle B'DE : \text{tg}\angle BDE = l$. Через середину отрезка AD проведена плоскость P, параллельная плоскости (ABC). Найти площадь сечения плоскостью P многогранника $ABCDE$, составленного из треугольных пирамид $ABCD$ и $BCDE$, если известно, что площадь грани ABC равна S, а сумма площадей всех граней пирамиды $BCDE$ равна σ.

4. (м/м-82.5) В четырёхугольной пирамиде $ABCDE$ основание $ABCD$ — параллелограмм, а грани ADE и BCE — прямоугольные треугольники. Ребро BC перпендикулярно медиане EP грани CDE и $BC = EP$. Сечением пирамиды плоскостью является равнобочная трапеция $GKHL$, вершины которой G, K, H, L лежат соответственно на рёбрах AE, BE, CE, DE, причём $GE = 3GA$ и $CH = EH$. Найти отношение площади трапеции $GKHL$ к площади грани ABE.

5. (м/м-84.5) В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ имеет своей осью симметрии диагональ AC, длина которой равна 9 *см*, а точка E пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ делит отрезок AC так, что длина отрезка AE меньше длины отрезка EC. Через середину бокового ребра пирамиды $SABCD$ проведена плоскость, параллельная основанию и пересекающаяся с рёбрами SA, SB, SC, SD соответственно в точках A', B', C', D'. Получившийся многогранник $ABCDA'B'C'D'$, являющийся частью пирамиды $SABCD$, пересекается плоскостью α по правильному шестиугольнику, длина стороны которого равна 2 *см*. Найти площадь треугольника ABD, если плоскость α пересекает отрезки BB' и DD'.

6. (м/м-86.6) В основании пирамиды $SABCD$ лежит четырёхуголь-

ник $ABCD$, у которого стороны AD и BC параллельны, длина стороны AB равна 4 *см*, длина стороны BC равна 8 *см*, а величина угла $\angle ABC$ равна $60°$. Длина ребра SB равна $8\sqrt{2}$ *см*. Найти объём пирамиды, если известно, что через прямые AD и BC можно провести две плоскости, не совпадающие с основанием пирамиды и пересекающие пирамиду по равным четырёхугольникам.

7. (м/м-88.4) Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен $\arccos\frac{\sqrt{35}}{10}$. Точки E и F являются серединами отрезков AB и CD. Найти угол $\angle ACB$, если известно, что $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{7}$ и $EF = \sqrt{13}$.

8. (м/м-91.6) В основании призмы лежит равносторонний треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$. Боковые рёбра AD, BE, CF, перпендикулярны основанию. Сфера радиуса $\frac{7}{2}$ касается плоскости ABC и продолжений отрезков AE, BF, CD за точки A, B и C соответственно. Найдите длину боковых рёбер призмы.

9. (м/м-92.5) На прямой l в пространстве последовательно расположены точки A, B и C такие, что, $AB = 10$ и $BC = 22$. Найти расстояние между прямыми l и m, если расстояние от точек A , B и C до прямой m равны 12, 13 и 20 соответственно.

10. (м/м-93(1).5) На диагоналях AB' и BC' граней параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ взяты точки M и N так, что, отрезки MN и $A'C$ параллельны. Найти отношение длин этих отрезков.

11. (м/м-96(1).6) Основанием вписанной в сферу четырёхугольной пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. Найти диагональ SD, если $SA = 7$, $SB = 2$, $SC = 6$ и $\angle SAD = \angle SBD = \angle SCD$.

12. (м/м-96(2).5) На рёбрах AA', AB, $B'C'$ и BC единичного куба $ABCDA'B'C'D'$ взяты точки K, L, M и N соответственно так, что $AL = \frac{2}{3}$, $B'M = \frac{1}{4}$, $CN = \frac{3}{10}$. Определить, какое из рёбер AB или AD пересекается плоскостью, параллельной отрезку ML и содержащей отрезок KN. В каком отношении это ребро делится плоскостью?

13. (м/м-98(1).5) Четырёхугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу, центр которой лежит в плоскости основания $ABCD$. Диагонали AC и BD основания пересекаются в точке H, причём SH — высота пирамиды. Найти рёбра CS и CD, если $CH = 4$, $AS = \frac{15}{4}$, $AD = 3$ и $AB = BS$.

14. (м/м-99(2).6) Основанием пирамиды $SABCD$ является трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такими, что $BC : AD = 2 : 5$. Диагонали трапеции пересекаются в точке E, а центр O вписанной в пирамиду сферы лежит на отрезке SE и делит его в отношении $SO : OE = 7 : 2$. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если площадь боковой грани SBC равна 8.

15. (м/м-00.6) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Известно, что плоскости треугольников ASC и BSD перпендикулярны друг другу. Найти площадь грани ASD, если площади граней ASB, BSC и CSD равны соответственно 5, 6 и 7.

16. (ВМиК-70.5) Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S является ромб, а высота SO пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Высота SO образует с ребром SA угол α, а с ребром SB — угол β. Вычислить угол между боковой гранью SAB и основанием пирамиды.

17. (ВМиК-71.5) Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник, стороны которого AB и AC равны и образуют угол α между собой, а высота пирамиды совпадает с ребром SA и равна h. Дана четырехугольная пирамида, имеющая ту же вершину S. Основанием её является четырехугольник, вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC. Найти объем четырехугольной пирамиды, если известно, что ее боковые грани равновелики, а боковые ребра равны.

18. (ВМиК-72.4) Шар касается плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ в точке A, кроме того, касается ребра SC. Через центр этого шара и сторону основания BC проведена секущая плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания, если плоскость сечения перпендикулярна грани ASD.

19. (ВМиК-78.5) Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырёхугольник $ABCE$, который диагональю BE делится на два равновеликих треугольника. Длина ребра AB равна единице, длины рёбер BC и CE равны. Сумма длин рёбер AH и EH равна $\sqrt{2}$. Объём пирамиды равен $\frac{1}{6}$. Найти радиус шара, имеющего наибольший объём среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$.

20. (ВМиК-84.6) Многогранник имеет 6 граней: $ABCD$, $EFGH$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $ADHE$. Все его вершины лежат на сфере радиуса $\sqrt{34}$. Грани $ABCD$ и $EFGH$ лежат в параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно 2. Известно, что $AB : CD = EF : GH \neq 1$, площадь грани $EFGH$ равна 5, а объем многогранника равен $\frac{98}{15}$. Найти длину ребра BF.

21. (ВМиК-95.6) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с параллельными гранями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ длина ребра равна 1. Точки K и N являются серединами рёбер DC и BC соответственно. Точка M лежит на ребре CC_1 и $MC = \frac{3}{4}$. Найти максимальное значение радиусов сфер, проходящих через точки M, N, K и касающихся плоскости BB_1D_1D.

22. (ВМиК-98(1).6) Двуграный угол, образованный полуплоскостями α и β, равен $\frac{\pi}{3}$. Внутри этого угла расположен треугольник ABC. Ортогональные проекции треугольника ABC на полуплоскости α и β есть треугольники AB_1C_1 и AB_2C_2 соответственно (B_1 и B_2 — проекции точки B, C_1 и C_2 — проекции точки C). Известно, что $AB = 3\sqrt{25 - 4\sqrt{3}}$, $AC = \sqrt{19 - 4\sqrt{3}}$, $AB_1 = 9\sqrt{2}$, $AB_2 = 6\sqrt{3}$, $AC_1 > AC_2$, $\angle B_1AC_1 = \angle B_2AC_2 = \frac{\pi}{12}$. Найти BC.

23. (ВМиК-99(1).6) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — основания, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) отрезки M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 — общие перпендикуляры к парам отрезков A_1C_1 и AB_1, BC_1 и AC, DC_1 и AD_1 соответственно. Объём параллелепипеда равен V, радиус описанной сферы равен R, а сумма длин рёбер AA_1, AB и AD

равна m. Найти сумму объёмов пирамид $AA_1M_1N_1$, ABM_2N_2 и ADM_3N_3.

24. (ВМиК-99.4) В четырехугольной пирамиде $SABCD$ высоты боковых граней, опущенные из вершины пирамиды S, равны $\sqrt{2}$. Пусть $AB = 2$, $BC = 6$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$. Найти высоту пирамиды, если ее основание находится внутри четырехугольника $ABCD$.

25. (ВМиК-00.4) В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, у которого угол ABC равен $60°$. На боковых рёбрах AA_1, BB_1 и CC_1 ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$) расположены точки K, L и M соответственно. Известно, что угол между прямыми KL и AB равен $45°$, а угол между прямыми LM и BC — $30°$. Найти угол между плоскостью, проходящей через точки K, L и M и плоскостью основания $ABCD$.

26. (физ-77.5) Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$) равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна $\frac{1}{3}$. На ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна $\frac{1}{4}$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α. Найти расстояние от вершины B_1 до плоскости α.

27. (физ-81.5) Правильную четырёхугольную пирамиду пересекает плоскость, проходящая через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру. Площадь получившегося сечения в два раза меньше площади основания пирамиды. Найти отношение длины высоты пирамиды к длине бокового ребра.

28. (физ-82.5) На боковом ребре правильной четырёхугольной пирамиды с вершиной S взята точка A, через которую в плоскостях боковых граней пирамиды проведены прямые, пересекающее апофемы этих граней в точках B и C и образующие углы величиной α с плоскостью основания пирамиды. Известно, что величины углов $\angle ABS$ и $\angle ACS$ равны β $\left(\beta > \frac{\pi}{2}\right)$. Найти величину угла $\angle BAC$.

29. (физ-84.5) Правильная треугольная призма целиком находится в правильной четырёх- угольной пирамиде так, что нижнее основание призмы принадлежит основанию пирамиды, а две вершины верхнего основания призмы находятся на апофемах пирамиды. Известно, что длины всех рёбер призмы равны, а длина стороны основания пирамиды в m раз больше длины высоты пирамиды. Найти отношение объёмов пирамиды и призмы.

30. (физ-85.5) Сфера с центром в точке S проходит через вершины основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$. Отношение площади полной поверхности пирамиды к площади поверхности сферы равно a. Найти величину угла $\angle ASB$ и указать все значения параметра a, при каждом из которых задача имеет решение.

31. (физ-87.6) Шар радиуса 2 вписан в правильную четырёхугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S. Второй шар радиуса 1 касается первого шара, основания пирамиды и боковых BSC граней CSD. Найти объём пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре SC.

32. (физ-89.4) В правильной четырёхугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к апофеме пирамиды.

33. (физ-91.6) В основании пирамиды $TABCD$ лежит трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AD : BC = 2 : 1$). Через вершину T пирамиды проведена плоскость, параллельная прямой BC и пересекающая отрезок AB в точке M такой, что $AM : MB = 2 : 1$. Площадь получившегося сечения равна S, а расстояние от ребра BC до плоскости сечения равно d. Найти:
1) в каком отношении плоскость сечения делит объём пирамиды,
2) объём пирамиды.

34. (физ-94(2).8) Наклонная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет имеет своими основаниями трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, сумма площадей параллельных боковых граней призмы равна S, а расстояние между этими гранями равно d. Найти объём иногогранника $BDA_1B_1C_1D_1$.

35. (физ-95.6) В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна H, а двугранный угол при боковом ребре равен α. Найти объём

пирамиды.

36. (физ-96(1).6) В правильной четырёхугольной пирамиде $SBCDE$ с вершиной S боковое ребро равно b, а двугранный угол между боковыми гранями равен α. Найти объём пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ BD основания и середину бокового ребра SC.

37. (физ-96(2).7) В правильной четырёхугольной пирамиде отношение бокового ребра к стороне основания равно $\frac{\sqrt{5}}{2}$, а радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен 1. Найти объём пирамиды.

38. (физ-96.6) В прямоугольном параллелепипеде диагональ, равная d, образует с боковыми гранями углы β и γ. Найти объём параллелепипеда.

39. (физ-97(1).8) В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ — прямоугольник, $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Найти SD.

40. (физ-97(2).4) Высота правильной четырёхугольной пирамиды в два раза меньше её апофемы. Объём пирамиды равен 108. Найти высоту пирамиды.

41. (физ-97(2).8) В правильной четырёхугольной пирамиде радиус вписанного шара равен r, а двугранный угол при боковом ребре равен α. Найти объём пирамиды, вершины которой находятся в центре вписанного шара и в точках его касания с боковыми гранями исходной пирамиды.

42. (физ-99(1).8) Высота SH правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ служит диаметром сферы. Известно, что $AS = b$, а двугранный угол при основании пирамиды равен β. Найти длину линии пересечения сферы с поверхностью пирамиды.

43. (физ-99(2).8) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) $AB = BC = 2a$, $AA_1 = a$. Плоскость сечения проходит через точки B_1 и D параллельно прямой AC. Найти радиус шара, касающегося этого сечения и трёх граней параллелепипеда с общей вершиной B.

44. (физ-99.7) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S боковое ребро SA равно b. Сфера радиуса $\frac{b}{2}$ касается плоскости SAC в точке C и проходит через точку B. Найти $\angle ASC$.

45. (хим-70.5) Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (AA_1, BB_1, CC_1 — боковые рёбра), у которой $AC = 6$, а $AA_1 = 8$. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая рёбра BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и N. Найти, в каком отношении делит эта плоскость объём призмы, если известно, что $BM = MB_1$, а AN является биссектрисой угла $\angle CAC_1$.

46. (хим-71.5) Правильная прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ описана около шара радиуса r, M — середина ребра BB_1, N — середина ребра CC_1. В шар вписан прямой круговой цилиндр так, что его основание лежит в плоскости AMN. Найти объём этого цилиндра.

47. (хим-72.4) В прямую призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$, нижним основанием которой является ромб $ABCD$, а AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые рёбра, вписан шар радиуса R. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A, B, C_1, если известно, что $\angle BAD = \alpha$.

48. (хим-76.5)
В кубе $ABCDA'B'C'D'$, где AA', BB', CC' и DD' — параллельные рёбра, плоскость P проходит через диагональ $A'C'$ грани куба и середину ребра DD'. Найти расстояние от середины ребра CD до плоскости P, если ребро куба равно 4 *см*.

49. (хим-78.3.Н) Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых граней имеет периметр 6 *см*. Найти среди них параллелепипед с наибольшим объёмом и вычислить этот объём.

50. (хим-82.4) Правильная четырёхугольная пирамида лежит боковой гранью на горизонтальной плоскости Π. Площадь основания пирамиды равна S_1, площадь боковой поверхности — S_2. На какой высоте (над плоскостью Π) находятся наивысшие точки пирамиды?

51. (хим-83.3) Треугольная призма $ABCA'B'C'$ с нижним основанием ABC и боковыми рёбрами AA', BB', CC' рассечена плоскостью, проходящей через точки E, F, C, где точка E является серединой ребра AA', точка F лежит на ребре BB', причём $BF : FB' = 1 : 2$. Найти объём части призмы $ABCA'B'C'$, заключённой между секущей плоскостью и нижним основанием этой призмы, если известно, что объём призмы равен V.

52. (хим-84.4) В правильную четырёхугольную пираимду $SABCD$ с вершиной S, у которой длины всех рёбер равны между собой, вписана правильная четырёхугольная пирамида $S'A'B'C'D'$ с вершиной S', у которой длины всех рёбер также равны между собой. При этом вершина S' лежит в плоскости $ABCD$ а вершины A', B', C' лежат соответственно на рёбрах SA, SB, SC и SD. Доказать, что вершина S' лежит в точке пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, и найти отношение объёмов этих этих пирамид.

53. (хим-85.4) Основанием пирамиды служит ромб, длина стороны которого равна 2 *см*, а величина острого угла равна $\frac{\pi}{4}$. Шар, радиус которого равен $\sqrt{2}$ *см*, касается плоскости каждой боковой грани пирамиды в точке, лежащей на стороне основания пирамиды. Доказать, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания пирамиды. Найти объём пирамиды.

54. (хим-87.4) Основанием четырёхугольной пирамиды $FABCD$ является квадрат $ABCD$. На ребре AF взята точка E, такая, что отрезок CE перпендикулярен ребру AF. Проекция O точки E на основание пирамиды лежит на отрезке AC и делит его в отношении $AO : OC = \gamma$. Найти разность объёмов пирамид $FABCD$ и $EABD$, если известно, что угол $\angle ADF = 90°$, а $AB = a$.

55. (хим-90.5) В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 6$ и $BC = 9$. Высота пирамиды проходит через точку O пересечения диагоналей AC и BD основания и равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Точки E и F лежат на рёбрах AB и AD соответственно, $AE = 4$, $AF = 6$. Найти площадь многоугольника, полученного при пересечении пирамиды с плоскостью, проходящей через точки E и F и параллельной ребру AS.

56. (хим-99(1).5) В шар радиуса 3 *см* вписан многогранник $ABCDE$ так, что точка A симметрична точке E относительно плоскости, проходящей через точки B, C и D, а точка B симметрична точке D относительно плоскости, проходящей через точки A, C и E. Найти отношение объёма шара к объёму многогранника $ABCDE$, если $AC=BC=3\sqrt{2}$ *см.*

57. (хим-99.5) В сферу радиуса $\sqrt{3}$ *см* вписан параллелепипед, объём которого равен 8 *см*^{3}. Найти площадь полной поверхности параллелепипеда.

58. (био-82.3) В правильную четырёхугольную пирамиду $SABCD$ вписан куб. Все четыре вершины одной из граней куба лежат на основании $ABCD$ пирамиды. Вершины противоположной грани куба лежат на боковых рёбрах пирамиды. Известно, что $SA = AB = a$, т.е. длина бокового ребра пирамиды равна a и равна длине стороны её основания. Чему равен объём куба?

59. (био-84.4) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, длина стороны которого равна a. Длина диагонали AC ромба в $1,5$ раза больше длины его стороны. Основание высоты пирамиды совпадает с центром ромба, и её длина в $1,5$ раза больше длины AC. Через точку A и середину ребра CS проведена секущая плоскость, образующая с плоскостью основания пирамиды угол, величина которого равна $45°$. Какова площадь сечения пирамиды этой плоскостью, и сколько таких плоскостей можно построить?

60. (почв-82.5) Ребро SA четырёхугольной пирамиды $SABCD$ перпендикулярно плоскости основания $ABCD$. Длина ребра SA равна 1. Основание $ABCD$ — квадрат со стороной 8. Точки P и Q — середины отрезков AD и CD. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду $SDPQ$ (т.е. касающейся всех её боковых граней и основания).

61. (геогр-82.5) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ длина ребра AB равна 4 *см*, длина ребра AD равна 6 *см*, длина ребра AA' равна 8 *см*. Точка K, лежащая на ребре AA', удалена от вершины A на 4 *см*. Расстояние от точки L ребра DD' до вершины D равно 2 *см*. Точка M лежит на отрезке $B'C$, длина MC вдвое больше длины $B'M$. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки K, L и M.

62. (геогр-84.4) Через середину высоты правильной четырёхугольной пирамиды проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру. Найти площадь этого сечения, если длина бокового ребра равна 4, а величина угла между боковыми ребрами, лежащими в одной грани, равна $\frac{\pi}{3}$.

63. (геол.ГФ-87.6) На продолжении ребра SK правильной четырёхугольной пирамиды $SKLMN$ с вершиной S взята точка A так, что расстояние от точки A до плоскости SMN равно 24 *см*. Найти длину отрезка KA, если $SL = 2\sqrt{41}$ *см*, $MN = 16$ *см*.

64. (геол.ОГ-73.4) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 1 *см*. Объём пирамиды равен $\frac{\sqrt{2}}{3}$ *см*^{3}. Через сторону основания CD проведено сечение, которое делит пополам двугранный угол, образованный боковой гранью SCD и основанием. Найти площадь сечения.

65. (геол.ОГ-74.5) Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На продолжении ребра CD взята точка K так, что $DK : KC = 3 : 4$. На ребре SC взята точка L так, что $SL : LC = 2 : 1$. В каком отношении делит объём пирамиды плоскость, проведённая через точки K, B и L?

66. (геол.ОГ-84.6) В основании пирамиды $SABCD$ лежит равнобочная трапеция $ABCD$, у которой величины углов при основании AD равны $\frac{3\pi}{8}$, а длины оснований равны $1+\sqrt{2}$ и 1. Основание H высоты SH пирамиды лежит вне трапеции $ABCD$ и удалено на расстояние 1 от вершины A. Найти радиус описанного около пирамиды шара, если известно, что длина высоты SH равна $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$, а $BH \perp AD$.

67. (геол.ОГ- 85.6) Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, длина ребра которого равна 4. На середине ребра BC взята точка M, а на ребре $A'D'$ на расстоянии 1 от вершины A' взята точка N. Найти длину кратчайшего пути между точками M и N по поверхности куба.

68. (геол-94.10) Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, в нём через вершину B проведена диагональ. Найти отношение площади сечения этого куба плоскостью, перпендикулярной указанной диагонали и проходящей через её середину, к площади его полной поверхности.

69. (геол-99(1).6) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, длина каждого ребра которой равна 2, построено сечение плоскостью, параллельной диагонали основания AC и боковому ребру SB пирамиды и пересекающей ребро AB. Найти периметр многоугольника, полученного в этом сечении, если длина нижнего основания сечения равна $\sqrt{2}$.

70. (геол-99.7) Сфера радиуса $\sqrt{41}$ проходит через вершины B, C, C_1 и через середину ребра A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$). Найти площадь поверхности этого куба.

71. (экон-70.1) Объём бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, равен $200\,см^3$. Периметр основания равен $40\,см$. Найти Размеры бруска.

72. (экон.К-73.3) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с площадью основания S и высотой h. Через вершину A_1 верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ проведена секущая плоскость, пересекающая боковое ребро BB_1 в точке B_2, боковое ребро CC_1 в точке C_2 и боковое ребро DD_1 в точке D_2. Найти объём той части параллелепипеда, которая расположена под секущей плоскостью, если известно, что $CC_2 = c$.

73. (экон.К-76.4) Основание ABC треугольной пирамиды $SABC$ является прямоугольным треугольником площадью в $16\,м^2$; угол $\angle ACB$ — прямой. Ребро SC перпендикулярно основанию ABC и равно $0,9\,м$. Какова наименьшая возможная при этих условиях площадь грани ASB?

74. (экон.К-84.6) В основании пирамиды с вершиной S лежит прямоугольник, центр которого лежит на высоте пирамиды. Плоскость пересекает боковые рёбра пирамиды в точках P, Q, M и N так, что P и M — противоположные вершины четырёхугольника $PQMN$. Известно, что длина отрезка SP равна 7, длина отрезка SM равна $\frac{7}{6}$, сумма длин отрезков SQ и SN равна $\frac{25}{6}$, известно также, что длина отрезка SQ больше длины отрезка SN. Найти длины отрезков SQ и SN.

75. (экон.К-86.6) В наклонной треугольной призме $PQRP_1Q_1R_1$ площадь боковой грани PP_1R_1R равна $64\,см^2$, а косинусы двугранных углов при рёбрах PP_1 и QQ_1 равны соответственно $\frac{\sqrt{10}}{4}$ и

$\frac{1}{4}$. В эту призму помещена треугольная призма $DEFD_1E_1F_1$ так, что вершины D, E, F лежат на на отрезках PQ, QR, RP, а вершины D_1, E_1, F_1 — на отрезках P_1Q_1, Q_1R_1, R_1P_1 соответственно. Известно, что призма $DEFD_1E_1F_1$ имеет наименьшую площадь боковой поверхности среди всех так расположенных призм. Найти площадь боковой поверхности призмы $DEFD_1E_1F_1$.

76. (псих-71.2) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. На продолжении рёбер AB и BB_1 соответственно отложены отрезки AM и B_1N длины $AM = 0,5 \cdot AB$ и $B_1N = 2 \cdot B_1B$ ($BM = 1,5 \cdot AB$; $BN = 3 \cdot BB_1$). Где на ребре CC_1 должна находиться точка P для того, чтобы в сечении куба плоскостью, проведённой через точки M, N и P, был четырёхугольник?

77. (псих-73.3) Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ (S — её вершина). Сторона основания этой пирамиды равна a, высота пирамиды равна $a\sqrt{\frac{7}{2}}$. Пусть E — середина стороны основания AB, F — середина SB, G — середина SC (B и C — соседние вершины основания пирамиды). Найти расстояние от центра шара, описанного около пирамиды $SABCD$, до плоскости, проведённой через точки E, F, G, H, где H — середина CD.

78. (филол-73.2) Плоскость, не содержащая вершин заданной правильной n-угольной пирамиды, делит совокупность этих вершин на две части. Сколькими способами можно осуществить подобное деление?

79. (филол-76.5) В шар вписана прямоугольная призма, в основании которой — правильный треугольник, а высота призмы равна стороне основания. Найти отношение объёма призмы к объёму вписанной в тот же шар правильной шестиугольной пирамиды, боковое ребро которой равно удвоеннной стороне основания.

80. (филол-77.5) Дана пирамида $SABC$. Точки D и E лежат в соответственно на рёбрах SA и SB, причём $SD : DA = 1 : 2$ и $SE : EB = 1 : 2$. Через точки D и E проведена плоскость α, параллельная ребру SC. В каком отношении делит плоскость α объём пирамиды?

81. (филол-81.5.С) Объём правильной треугольной призмы равен V. Угол между диагоналями двух боковых граней, проведёнными из одной вершины, равен α. Определить сторону основания призмы.

82. (филол-90.5) Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ служит квадрат $ABCD$, а высота пирамиды совпадает с ребром SA. Найти высоту пирамиды, если радиус вписанного в пирамиду шара равен 3, а сторона квадрата $ABCD$ равна 15.

83. (ИСАА-99.4) Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом 15° и с гипотенузой равной 2. Все боковые рёбра равны между собой и наклонены к плоскости основания под углом 65°. Определить объём пирамиды.

§4. Шар, цилиндр, конус и другие фигуры вращения.

Напомним основные **определения**. Обратите внимание, что определения даются в расширенном виде, содержат названия элементов фигур, формулировки простейших, приводимых без доказательств, свойств.

- **Определение 1.** *Прямым круговым цилиндром* (или просто *цилиндром*) называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его сторон. При вращении вокруг той же оси ломаной, составленной из сторон прямоугольника, не лежащих на оси вращения, получается фигура, которая называется *поверхностью цилиндра*. Круги, полученные в результате вращения сторон, смежных со стороной, принадлежащей оси вращения, называются *основаниями цилиндра*. Радиус этих двух равных кругов называется *радиусом основания* (или просто *радиусом*) цилиндра. Сторона прямоугольника, не смежная со стороной, принадлежащей оси вращения, называется *образующей* цилиндра. Фигура, полученная в результате вращения образующей цилиндра называется *боковой поверхностью* цилиндра. Ось вращения называют *осью* цилиндра. Сторону прямоугольника, лежащую на оси вращения называют *высотой* цилиндра. Сечение цилиндра, проходящее через ось цилиндра, называется *осевым сечением*. Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и

перпендикулярная осевому сечению, проведённому через эту образующую, называется *касательной плоскостью* цилиндра. *Призмой, вписанной* в цилиндр, называется призма, основания которой — равные многоугольники, вписанные в основания цилиндра, а её боковые рёбра являются образующими цилиндра. *Призмой, описанной* около цилиндра, называется призма, основания которой — равные многоугольники, описанные около оснований цилиндра, а грани боковой поверхности касаются боковой поверхности цилиндра.

- **Определение 2.** *Прямым круговым конусом* (или просто *конусом*) называется фигура, полученная вращением прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет. Фигура, полученная вращением вокруг той же оси ломаной, составленной из гипотенузы и катета, не принадлежащего оси вращения, называется *поверхностью* конуса, при этом фигура, полученная вращением гипотенузы называется *боковой поверхностью* конуса, а круг, полученный вращением катета, — *основанием* конуса. Радиус этого круга называется *радиусам основания* (или просто *радиусом*) конуса. Гипотенузу называют *образующей* конуса. Ось вращения называется *осью* конуса, а катет, лежащий на гипотенузе, — *высотой* конуса. Конец высоты, лежащий в основании, называют *центром основания*, а противоположный конец — *вершиной* конуса. Сечение конуса, проходящее через ось конуса, называется *осевым сечением*. Плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная осевому сечению, проведённому через эту образующую, называется *касательной плоскостью* конуса. *Пирамидой, вписанной* в конус, называется пирамида, основание которой — многоугольник, вписанный в основание конуса, вершина является вершиной конуса, а её боковые рёбра являются образующими конуса. *Пирамидой, описанной* около конуса, называется пирамида, основание которой — многоугольник, описанный около основания конуса, вершина является вершиной конуса, а грани боковой поверхности касаются боковой поверхности конуса.

- **Определение 3.** *Усечённым конусом* называется часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным основанию. *Ось усечённого конуса* совпадает с осью конуса. *Боковая поверхность, образующая, высота, осевое сечение* усечённого конуса, *вписанная усечённая пирамида, описанная усечённая пирамида*

определяются как части аналогичных фигур конуса, ограниченные вышеуказанными основанием и сечением. Касательная плоскость конуса является *касательной плоскостью усечённого конуса. Основания* усечённого конуса — гомотетичные круги с центром гомотетии в вершине конуса. Усечённый конус можно получить в результате вращения равнобокой трапеции вокруг её оси симметрии.

- **Определение 4.** *Шаром* называют фигуру, состоящую из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не больше данного, от данной точки. Эта точка называется *центром* шара, а данное расстояние — *радиусом* шара. Граница шара называется *шаровой поверхностью* или *сферой* Таким образом, сфера — множество всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии (*радиус сферы*) от данной точки (*центр сферы*). Радиусом шара (сферы) называется также любой отрезок, сединяющий центр шара (сферы) и точку шаровой поверхности (сферы). Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности (сферы) называется *хордой* шара (сферы). Если хорда проходит через центр шара (сферы), то её называют *диаметром*. Шар (сферу) можно получить вращением круга (окружности) вокруг его (её) диаметра как оси. Плоскость, проходящая через центр шара (сферы) называется *диаметральной плоскостью*. Сечение шара (сферы) диаметральной плоскостью называется *большим кругом* (*большой окружностью*). Плоскость, проходящая через точку шаровой поверхностью (сферы) и перпендикулярная радиусу, проведённому в эту точку, называется *касательной плоскостью* к шару (сфере). Прямая, проходящая через точку шаровой поверхностью (сферы) и перпендикулярная радиусу, проведённому в эту точку, называется *касательной прямой* к шару (сфере). *Шаровым сегментом* называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью. Наибольшее расстояние от точки шарового сегмента, лежащей на шаровой поверхности, до отсекающей его плоскости называется *высотой* шарового сегмента. *Шаровым слоем* называется часть шара, расположенная между двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар. Расстояние между этими двумя плоскостями называется *высотой* шарового слоя. *Шаровым сектором* называется фигура в пространстве, которая получается вращением кругового сектора вокруг его оси симметрии. Шаровой сектор получается из шарового сегмента довавлением (если шаровой сегмент меньше полушара) или удале-

нием (если шаровой сегмент больше полушара) соответствующего конуса.

- **Определение 5.** ***Фигурой вращения*** в общем случае называется фигура в пространстве, для которой существует прямая (*ось вращения*), такая, что все сечения указанной фигуры плоскостями, перпендикулярными этой прямой, являются кругами.

Сформумируем без доказательства некоторые простые **увеждения и теоремы**.

- **Утверждение 1.** Плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его по кругу, а его боковую поверхность — по окружности, равной окружности основания и с центром на оси цилиндра.

- **Утверждение 2.** Плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает его по кругу, а его боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.

- **Утверждение 3.** Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

- **Утверждение 4.** Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии.

- **Утверждение 5.** Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.

- **Утверждение 6.** Через любую точку шаровой поверхности проходит бесчисленное множество касательных прямых, все они лежат в касательной плоскости шара.

- **Утверждение 7.** Линия пересечения двух сфер есть окружность.

- **Утверждение 8.** Объём цилиндра V вычисляется по формуле $V = \pi R^2 H$, где R — радиус основания цилиндра, а H — высота цилиндра.

- **Утверждение 9.** Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{\text{бок}}$ вычисляется по формуле $S_{\text{бок}} = 2\pi RH$, где R — радиус основания цилиндра, а H — высота цилиндра.

- **Утверждение 10.** Площадь (полной) поверхности цилиндра $S_{\text{цил}}$ вычисляется по формуле $S_{\text{цил}} = 2\pi RH + 2\pi R^2$, где R — радиус основания цилиндра, а H — высота цилиндра.

- **Утверждение 11.** Объём конуса V вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, где R — радиус основания конуса, а H — высота конуса.

- **Утверждение 12.** Площадь боковой поверхности конуса $S_{\text{бок}}$ вычисляется по формуле $S_{\text{бок}} = \pi RL$, где R — радиус основания конуса, а L — образующая конуса.

- **Утверждение 13.** Площадь (полной) поверхности конуса $S_{\text{кон}}$ вычисляется по формуле $S_{\text{кон}} = \pi R(L + R)$, где R — радиус основания конуса, а L — образующая конуса.

- **Утверждение 14.** Объём усечённого конуса V вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$, где R и r — радиусы нижнего и верхнего оснований усечённого конуса, а H — высота усечённого конуса.

- **Утверждение 15.** Площадь боковой поверхности усечённого конуса $S_{\text{бок}}$ вычисляется по формуле $S_{\text{бок}} = \pi(R + r)L$, где R и r — радиусы нижнего и верхнего оснований усечённого конуса, а L — образующая усечённого конуса.

- **Утверждение 16.** Площадь (полной) поверхности усечённого конуса $S_{\text{ус.кон}}$ вычисляется по формуле $S_{\text{ус.кон}} = \pi(R + r)L + \pi\left(R^2 + r^2\right)$, где R и r — радиусы нижнего и верхнего оснований усечённого конуса, а L — образующая усечённого конуса.

- **Утверждение 17.** Объём шара V вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — радиус шара.

- **Утверждение 18.** Площадь шаровой поверхности (сферы) S вычисляется по формуле $S = 4\pi R^2$, где R — радиус шара (сферы).

- **Утверждение 19.** Объём шарового сегмента V вычисляется по формуле $V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$, где R — радиуса шара, а H — высота шарового сегмента, либо по формуле $V =$

$\frac{1}{6}\pi H\left(H^2+3r^3\right)$, где H — высота шарового сегмента, а r — радиус основания сегмента.

- **Утверждение 20.** Объём шарового слоя V вычисляется по формуле $V=\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)h$, где h — высота шарового слоя, а r_1 и r_2 — радиусы оснований.

- **Утверждение 21.** Объём V шарового сектора шара радиуса R вычисляется по формуле $V=\frac{2}{3}\pi R^2 H$, где H — высота соответствующего шарового сегмента.

- **Утверждение 22.** Площадь шаровой поверхности шарового сегмента (шарового сектора) S вычисляется по формуле $S=2\pi RH$, где R — радиус шара, а H — высота (соответствующего) шарового сегмента.

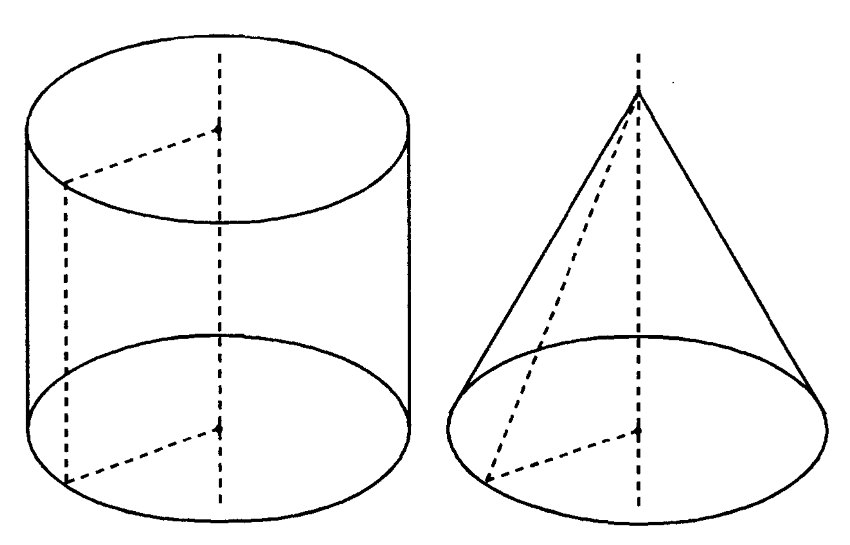


рис.15. Прямой круговой цилиндр. *рис.16. Прямой круговой конус.*

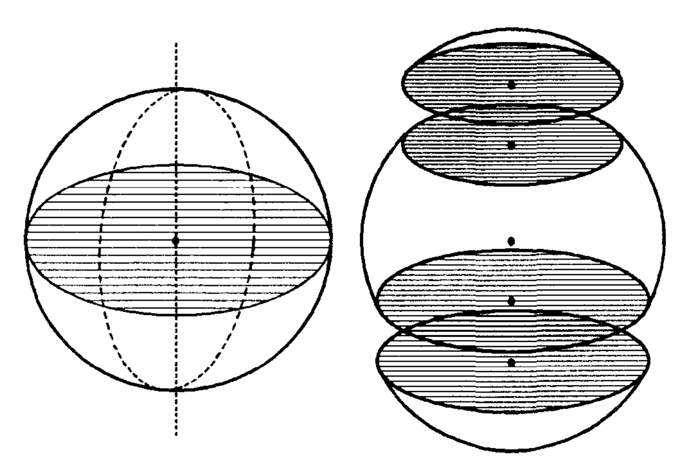


рис.17. Шар рис.18. Сегменты шара и шаровой слой.

Все формулы и утверждения, которые использовались для решения задач в предыдущих параграфах, могут пригодиться и в этом параграфе.

Первый раздел. Подготовительные задачи.

1. Плоскость касается двух касающихся шаров радиуса R и r в точках AB и B. Докажите, что $AB = 2\sqrt{Rr}$.

2. Три шара попарно касаются друг друга, плоскость касается этих шаров в точках A, B и C. Стороны треугольника ABC равны a, b и c. Докажите, что радиусы шаров равны $\frac{ab}{2c}$, $\frac{ac}{2b}$ и $\frac{bc}{2a}$.

3. Два шара одного радиуса и два шара другого радиуса расположены так, что, каждый шар касается трёх других шаров и данной плоскости. Докажите, что отношение большего из радиусов шаров к меньшему равно $2 + \sqrt{3}$.

4. Радиусы двух непересекающихся шаров равны R и r. Расстояние между их центрами равно a. Докажите, что длина общей касательной к этим шарам не меньше чем $a^2 - (R + r)^2$ и небольше чем $a^2 - (R - r)^2$.

5. Две касающиеся сферы вписаны в двугранный угол величиной 2α. Первая сфера касается первой грани угла в точке A, а вторая сфера касается второй грани угла в точке B. Докажите, что отрезок AB точками пересечения со сферами делится в отношении $\cos^2\alpha : \sin^2\alpha : \cos^2\alpha$.

6. Из произвольной точки пространства опущены перпендикуляры на плоскости граней данного куба. Полученные отрезки являются диагоналями шести других кубов. Рассмотрим шесть сфер, каждая из которых касается всех рёбер соответствующего куба. Докажите, что все эти сферы имеют общую касательную прямую.

7. Сфера с диаметром CE касается плоскости ABC в точке C. AD — касательная к этой сфере. Докажите, что, если точка B лежит на прямой DE, то $AC = AB$.

8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость, проходящая через вершину A и касающаяся вписанной в куб сферы, пересекает рёбра A_1B_1 и A_1D в точках K и N. Докажите, что величина угла между плоскостями AC_1K и AC_1N равна 120°.

9. Два равных треугольника KLM и KLN имеют общую сторону KL, причём $\angle KLM = \angle LKN = 60^\circ$, $KL = 1$ и $LM = KN = 6$. Плоскости KLM и KLN перпендикулярны. Докажите, что радиус шара, касающегося середин отрезков LM и KN равен $\sqrt{\dfrac{137}{12}}$.

10. Из точек A и B проведены всевозможные касательные к данной сфере. Докажите, что все точки их пересечения, отличные от A и B, лежат в двух плоскостях.

11. Центры трёх сфер, радиусы которых равны 3, 4 и 6, расположены в вершинах правильного треугольника со стороной 11. Докажите, что существует всего 6 плоскостей, касающихся одновременно всех этих сфер.

12. Боковая поверхность цилиндра, будучи развёрнута, представляет собой прямоугольник, в котором диагональ длины d составляет угол α с основанием. докажите, что объём цилиндра равен $\dfrac{d^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$.

13. Площадь сечения цилиндра плоскостью, перпендикулярной к образующей, равна S_1, а площадь осевого сечения равна S_2. Докажите, что площадь боковой поверхности цилиндра равна πS_2, а объём — $\dfrac{S_2\sqrt{\pi S_1}}{2}$.

14. Радиус основания конуса равен r, а угол при выршине в развёртке его боковой поверхности равен $90°$. Докажите, что объём конуса равен $\dfrac{\pi r^3\sqrt{15}}{3}$.

15. Боковой поверхностью конуса служит свёрнутая четверть круга. Докажите, что полная поверхность конуса равна $\dfrac{\pi S\sqrt{15}}{3}$, если площадь его осевого сечения равна S.

16. Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса равна S; расстояние от центра основания до до образующей равно d. Докажите, что его объём равен $\dfrac{Sd}{3}$.

17. Площадь боковой поверхности конуса относится к площади основания, как $2:1$. Площадь его осевого сечения равна S. Доказать, что объём конуса равен $\dfrac{\pi S\sqrt{S}}{3\sqrt[4]{3}}$.

18. Докажите, что объём конуса, радиус основания которого равен r, а площадь боковой поверхности равна сумме площадей его основания и бокового сечения, равен $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\pi^2 r^3}{\pi^2-1}$.

19. Высота конуса равна диаметру его основания. Докажите, что отношение площадей его основания и боковой поверхности равно $\sqrt{5}:5$.

20. Плоскость, проведённая через вершину конуса, пересекает основание по хорде, длина которое равна радиусу основания. Докажите, что отношение объёмов образовавшихся частей конуса равно $\left(2\pi-3\sqrt{3}\right):\left(10\pi+3\sqrt{3}\right)$.

Второй раздел. Конкурсные задачи.

1. (м/м-76.4) Три шара, среди которых имеются два одинаковых, касаются плоскости P и, кроме того, попарно касаются друг друга. Вершина прямого кругового конуса принадлежит плоскости P а ось конуса перпендикулярна этой плоскости. Все три шара лежат вне конуса, причём каждый из них касается некоторой образующей конуса. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью P, если известно, что в треугольнике с вершинами в точках касания шаров с плоскостью один из углов равен $150°$.

2. (м/м-76.4) Внутри прямого кругового конуса, касаясь основания, лежат три шара радиусов 4, 4 и 5. Каждый из них касается двух других шаров и некоторой образующей конуса. Найти радиус основания конуса, если известно, что угол между основанием и образующей равен $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$.

3. (м/м-85.5) На плоскости α, проходящей через центр шара радиуса R, задана окружность с центром в точке O_1 и радиусом r_1, расположенная внутри шара. Все точки этой окружности соединены прямыми с точкой A, принадлежащей шару и удалённой от плоскости α на расстояние R. Множество отличных от A точек пересечения этих прямых с поверхностью шара является окружностью радиуса r_2, плоскость которой образует угол φ с плоскостью α. Найти расстояние между точками A и O_1.

4. (м/м-89.5) Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причём $KL = 1$, $PQ = 3$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP, LP, NQ, MQ, PQ касаются некоторого шара. Найти объём этого шара.

5. (м/м-93.5) Сфера радиуса R делит каждое из рёбер SA, SC, AB и CB треугольной пирамиды $SABC$ на три равные части и проходит через середины рёбер AC и SB. Найти длину высоты пирамиды, опущенной из вершины S.

6. (м/м-94.5) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сфера касается рёбер AD, DD_1, CD и прямой BC_1. Найти радиус сферы, если длина ребра куба равна 1.

7. (м/м-95.5) Три параллельные прямые касаются в точках A, B и C сферы радиуса 4 с центром в точке O. Найти угол $\angle BAC$, если известно, что площадь треугольника OBC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

8. (м/м-97(1).6) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длина ребра равна 1. Одна сфера радиуса $\frac{1}{4}$ касается плоскости ABC в точке A; другая сфера касается плоскости $A_1B_1C_1$ в точке E_1, лежащей на отрезке B_1C_1, причём $B_1E_1 : E_1C_1 = 2 : 1$. Известно, что эти сферы касаются друг друга внешним образом и точка их касания лежит внутри куба. Найти расстояние от точки касания сфер до точки D.

9. (м/м-97(2).5) В шаре радиуса 7 через точку S проведены три равные хорды AA', BB' и CC' так, что $AS = 8$, $A'S = 3$, $BS > B'S$, $CS > C'S$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

10. (м/м-97.6) Вокруг пирамиды $ABCD$ описана сфера. Вторая сфера радиуса 1 касается первой внутренним образом в точке D, а также касается плоскости ABC. Известно, что

$$AD = 3, \ \cos\angle BAC = \frac{4}{5}, \ \cos\angle BAD = \cos\angle CAD = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

найти объём пирамиды $ABCD$.

11. (м/м-99.6) Три шара радиусов 1, 2 и 5 расположены так, что каждый из них касается двух других шаров и двух данных плоскостей. Найти растояние между точками касания первого из этих шаров с плоскостями.

12. (м/м-00(1).6) Вершины квадрата $PQRS$ со стороной $\frac{25}{4}$ лежат на сфере. Параллельные друг другу прямые проходят через точки P, Q, R и S и повторно пересекают сферу в точках P_1, Q_1, R_1 и S_1 соответственно. Известно, что $PP_1 = 2$, $QQ_1 = 10$, $RR_1 = 6$. Найти длину SS_1.

13. (ВМиК-70.5) В прямом круговом конусе с вершиной S угол между образующими SA и SB равен α, а угол между их проекциями на

плоскость основания равен β. Вычислить угол между биссектрисами углов $\angle OSA$ и $\angle OSB$, где точка O является центром круга, служащего основанием конуса.

14. (ВМиК-70.5) Два прямых круговых конуса имеют общую вершину. Угол между осью и образующей одного конуса равен α, а его образующая является осью второго конуса, у которого угол между осью и образующей равен β, причём $\beta < \alpha$. Вычислить угол между двумя лучами, по которым пересекаются боковые поверхности конусов.

15. (ВМиК-73.4) Точки A, B, C, D, E, и F лежат на сфере радиуса $\sqrt{2}$. Отрезки AD, BE и CF пересекаются в точке S, находящейся на расстоянии 1 от центра сферы. Объёмы пирамид $SABC$ и $SDEF$ относятся как $1:9$, пирамид $SABF$ и $SDEC$ — как $4:9$, пирамид $SAEC$ и $SDBF$ — как $9:4$. Найти отрезки SA, SB и SC.

16. (ВМиК-88.6) Сфера с центром в точке O пересечена плоскостью $\mathcal{P}$. Внутри сферы расположены три шара, два из которых одного радиуса, а третий меньшего радиуса. Каждый из шаров касается двух других шаров, плоскости $\mathcal{P}$ и сферы. Известно, что синус угла между плоскостью, проходящей через центры шаров, и плоскотью $\mathcal{P}$ равен $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, а косинус угла между радиусами меньшего и большего шаров, проведенными в точки касания их со сферой, равен $\dfrac{4}{5}$. Расстояние от центра меньшего шара до точки O равно 15. Найти расстояние от точки O до плоскости $\mathcal{P}$, если известно, что оно больше 14.

17. (ВМиК-91.6) Сфера радиуса R Касается всех граней восьмигранника. Две грани — основания — расположены в плоскостях α и β а остальные шесть граней — боковые грани — представляют собой или равные между собой трапеции, или равные между собой равнобедренные треугольники. Боковые грани таковы, что каждая боковая сторона треугольника является одновременно боковой стороной трапеции, и а каждая боковая сторона трапеции является одновременно либо боковой стороной другой трапеции, либо боковой стороной одного из треугольников. Основания всех трапеций, имеющие длину $\sqrt{13}$, расположены в плоскости β и образуют

многоугольник площади 12, а все другие основания трапеций и все основания треугольников расположены в плоскости α. Площадь повехности сферы относится к суммарной площади боковых граней как π относится к 5. Известно, что $3 < R < 4$. Найти R.

18. (ВМиК-00(1).6) В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, у которого $AB = 15\sqrt{2}$, $BC = 20$, а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен $5\sqrt{5}$. На сторонах треугольника ABC как на диаметрах построены три сферы, пересекающиеся в точке O. Точка O является центром четвертой сферы, причем вершина пирамиды S является точкой касания этой сферы с некоторой плоскостью, параллельной плоскости основания ABC. Площадь части четвертой сферы, которая заключена внутри трехгранного угла, образованного лучами OA, OB и OC равна 8π. Найти объем пирамиды $SABC$.

19. (физ-72.5) На сфере, радиус которой равен 2 *м*, расположены три окружности радиуса 1 *м*, каждая из которых касается двух других. Найти радиус окружности, меньшей, чем данные, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.

20. (физ-79.6) В плоскости P дан равнобедренный треугольник ABC такой, что $AB = BC = l$, $AC = 2a$. Шар радиуса r касается плоскости P в точке B. Две скрещивающиеся прямые проходят через точки A и C и касаются шара. Угол между каждой из этих прямых и плоскостью P равен α. Найти расстояние между этими прямыми.

21. (физ-80.6) Даны два прямых круговых конуса, имеющие общую вершину O и одинаковые длины высот. У каждого из этих конусов величина угла между высотой и образующей равна φ. Конусы расположены по одну сторону от плоскости α так, что только одна образующая каждого конуса (OA для одного конуса и OB для другого) принадлежит плоскости α. Известно, что величина угла между высотами конусов равна β, причём $\varphi+\beta < \dfrac{\pi}{2}$. Найти величину угла между образующей OA и плоскостью основания другого конуса.

22. (физ-83.6) Дан трёхгранный угол с вершиной O, у которого величина каждого из плоских углов равна φ. Плоскость α пересекает

рёбра этого трёхгранного угла в точках A, B и C, причём отрезки OA и OB равной длины, а отрезок OC короче, чем отрезок OA. Известно, что величина двугранного угла между плоскостью α и гранью OAB равна β. Два шара расположены по разные стороны от плоскости α так, что каждый шар касается всех граней трёхгранного угла и плоскости α. Найти:

1) величину угла между прямой, проходящей через центры шаров, и плоскостью грани OAB,

2) отношение радиусов указанных шаров.

23. (физ-92.8) Три шара радиуса R касаются друг друга, и каждый из них касается боковой поверхности конуса. Шары находятся вне конуса. Высота конуса перпендикулярна плоскости α, содержащей центры шаров. Угол между высотой конуса и его образующей равен φ. Найти расстояние от вершины конуса до плоскости α.

24. (физ-93.8) Два шара радиуса r и цилиндр радиуса R ($R > r$) лежат на плоскости. Шары касаются друг друга и боковой поверхности цилиндра. Цилиндр касается плоскости по своей образующей. Найти радиус шара, меньшего чем данные, касающегося обоих данных шаров, цилиндра и плоскости.

25. (хим-71.5) Три одинаковых прямых круговых конуса, радиусы оснований которых равны r составляют $\frac{3}{4}$ их высоты, расположены по одну сторону от плоскости P, а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждых двух из этих конусов касаются. Найти радиус шара, лежащего между конусами и касающегося как плоскости P, так и всех трёх конусов.

26. (хим-81.4.Н) В прямом круговом конусе расположены два шара единичного радиуса, касающиеся основания конуса в точках, симметричных относительно центра основания. Каждый из шаров касается боковой поверхности конуса и другого шара. Найти величину угла между образующей конуса и основанием, при котором объём конуса наименьший.

27. (хим-81.4.С) В прямом круговом конусе расположены два шара радиуса r, касающиеся основания конуса в точках, симметричных относительно центра основания. Каждый шар касается боковой поверхности конуса и другого шара. Высота конуса в $\frac{4}{3}$ раза

больше радиуса основания. Найти объём конуса.

28. (био-71.2) В усечённый конус, образующая которого наклонена под углом 45° к нижнему основанию, вписан шар. Найти отношение величины боковой поверхности усечённого конуса к величине поверхности шара.

29. (био-75.2) В усечённом конусе, образующая которого наклонена под углом 45° к нижнему основанию, вписан шар. Найти отношение величины боковой поверхности усечённого конуса к величине поверхности шара.

30. (био-96.4) Плоское сечение SAB, проходящее через вершину S прямого кругового конуса, имеет площадь 60 *см*^{2}. Точки A и B, лежащие на окружности основания конуса, делят её длину в отношении $1:5$. Найти объём конуса, если угол $\angle SAB$ равен $\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)$.

31. (геогр-80.3) В правильную шестиугольную пирамиду вписан прямой конус и около неё описан прямой конус. Даны высота пирамиды H и радиус основания описанного конуса R. Найти разность объёмов описанного и вписанного конусов.

32. (геогр-89.4) Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Сфера касается прямых AB и AD в точке A и прямых BC и CD в точке C. Найти площадь сферы, если известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$.

33. (геогр-96(1).5) В сферу радиуса R вписан прямой круговой цилиндр. Найти наибольшее значение боковой поверхности цилиндра и отношение его высоты к радиусу сферы в этом случае.

34. (геол.ГФ-72.5) В треугольнике ABC $AC = 12$ *см*, $AB = BC = 3\sqrt{10}$ *см*. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках A и C и расположены по разные стороны от этой плоскости. Расстояние между центрами этих шаров равно 15 *см*. Центр третьего шара находится в точке B, и этот шар касается двух данных шаров. Определить радиус третьего шара.

35. (геол.ГФ-74.4) В прямой круговой цилиндр с радиусом основания $r = 1$ *см* и высотой $H = \frac{12}{3+2\sqrt{3}}$ *см* вписаны три одинаковых

шара так, что шары касаются верхнего основания цилиндра, его боковой поверхности и попарно друг друга. Найти объём прямого кругового конуса, основание которого совпадает с нижним основанием цилиндра и который касается *всех* трёх шаров.

36. (геол.ГФ-80.5) На сфере радиуса 11 *см* расположены точки A, A_1, B, B_1, C и C_1. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M, отстоящей от центра сферы на расстоянии $\sqrt{59}$ *см*. Найти длину отрезка AA_1, если известно, что длина отрезка BB_1 равна 18 *см*, а точка M делит отрезок CC_1 в отношении $\left(8+\sqrt{2}\right):\left(8-\sqrt{2}\right)$.

37. (геол.ГФ-85.6) Прямой круговой конус вращается вокруг оси — прямой, перпендикулярной его высоте и проходящей через вершину. Найти площадь сечения полученного тела вращения плоскостью, проходящей через ось вращения, если длина образующей конуса равна 5, а длина высоты равна 4.

38. (геол.ОГ-77.5.С) Найти радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна b, а угол между боковыми рёбрами равен α.

39. (экон-71.5) В двугранный угол $60°$ вписан шар радиуса R. Найти радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося данного шара, если известно, что прямая, соединяющая центры обоих шаров, образует с ребром двугранного угла угол $45°$.

40. (экон.К-71.4) На плоскости лежит шар радиуса R. Эту же плоскость пересекает прямой круговой цилиндр радиуса r, причём образующие цилиндра перпендикулярны к плоскости. Центр шара удалён от оси цилиндра на расстояние ρ $(\rho > R + r)$. Найти минимально возможный радиус шара, который бы касался одновременно цилиндра, плоскости и заданного шара.

41. (экон.К,геол.ГФ-82.6) Длина меньшего основания равнобочной трапеции вдвое больше суммы длин её боковых сторон. Найти наибольшее возможное целое значение m такое, что площадь полной поверхности фигуры, полученной вращением трапеции вокруг меньшего основания, в m раз больше площади трапеции.

42. (псих-70.4) В прямой круговой усечённый конус помещены два шара так, что первый шар касается верхнего основания конуса, его

боковой поверхности и второго шара, а второй шар касается нижнего основания, боковой поверхности и первого шара. Какую долю объёма конуса занимают оба шара, если образующая конуса наклонена к нижнему основанию под углом α?

43. (псих-72.4) Известно, что AB, AC, AD, , DF — рёбра куба. Через вершины E, F и середины рёбер AB и AC проведена плоскость P. Какую часть объёма шара, вписанного в куб, составляет объём меньшей из двух частей, на которые этот шар делится плоскостью P?

44. (псих-94.4) Длины боковых рёбер SA и SB четырёхугольной пирамиды $SABCD$ относятся как $\sqrt{7} : \sqrt{11}$. Через точки A, B, D проведена сфера, пересекающая боковые рёбра SA, SB, SD в точках A_1, B_1, D_1 соответственно, причём $AA_1 : A_1S = 1 : 3$. Через точки B, C, D, D_1 проведена ещё одна сфера, пересекающая боковое ребро SB в точке E. Найти отношение длин отрезков SE и B_1B.

45. (филол-81.5.Н) Найти высоту и радиус основания прямого кругового конуса наибольшего объёма, вписанного в шар радиуса R.

Планиметрия.

Ответы к §1. Прямоугольные треугольники

1. (геол.ОГ-83.2) $|AC| > |BK|$.
2. (геол.ОГ-88.1) $3 \cdot |AD|$ больше.
3. (химфак-95.4) 5.
4. (геогр-77.2) $\sqrt{7}$.
5. (экон.М-97.3) $\sqrt{13}$.
6. (физфак-94.4) $\dfrac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}$, $\dfrac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}$, $\dfrac{2mn}{\sqrt{4m^2-n^2}}$.
7. (филолог-90.3) 2:5.
8. (филол-98.2) $AB = AC = 2\sqrt{10}$.
9. (ВМиК-89.1) Можно.
10. (физфак-88.2) $R\sin 2\alpha$.
11. (психфак-80.3) $\sqrt{15+6\sqrt{3}}$.
12. (почв-89.4) $\dfrac{5}{12}\sqrt{13}$.
13. (физфак-95.4) $\dfrac{c\sin 2\alpha}{2\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}$.
14. (физфак-95.4) $2R\sin\alpha\sin\beta$.
15. (ВМиК-81.3) $AB = (6\sqrt{2}+1)$, $BC = 5\sqrt{3}$, $AC = 2$.
16. (физфак-97.4) 6.
17. (мехмат-84.3) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$; 1.20.
18. $\dfrac{1}{2}(1+2\cos 2\alpha)^2 \mathrm{tg} 2\alpha$.
19. (геол.ОГ-77.4) $\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}$.
20. (геол.-83.2) $|BL| > |BG|$.
21. (экон.К-83.4) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{5}}$.
22. (физфак-94.6) $\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{5}}$.
23. (физфак-94.4) $\dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$. (или $\arccos\dfrac{3}{5}$, $\arccos\dfrac{4}{5}$)
24. (ВМиК-88.3) 40.
25. (ВМиК-77.2) $\dfrac{1}{\sqrt{2-\pi/2}}$
26. (химфак-97.5) 25.
27. (геогр-94.4) $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$.
28. (геол.-96.6) $\dfrac{12}{5}$.

Ответы к §2. Общие треугольники

1. (ВМиК-89.1) Можно.
2. (ВМиК-89.1) Нельзя.

3. (химфак-96.4) $\frac{5}{2}$.

4. (физфак-89.2) $\sqrt{\frac{2S}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}}$.

5. (психфак-94.3) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

6. $\frac{abc}{mkc + nkb + mna}$.

7. (геол.-86.2) 3.

8. (геогр-86.4) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}$.

9. (геол.ОГ-78.4)

10. (физфак-93.4) $R\sin 2\alpha \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

11. (геол.ОГ-84.4) 6.

12. (геол.-88.4) $\frac{91(6-\sqrt{6})}{30}$.

13. (геол.-84.4) $\frac{5\sqrt{119}}{13}$.

14. (мехмат-90.1) $\frac{3}{2}(3\sqrt{3}-4)$

15. $\frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$, $\arcsin\frac{b\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$.

16. (экон-98.6) $\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{r^2-\frac{a^2}{3}} = \frac{a}{6}\sqrt{3r^2-a^2}$.

17. (экон.М-95.5) $3\sqrt{3} \pm 4$.

18. (социол-97.2) а) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$; б) $\frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+5}\sqrt{41-10\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$, $\frac{5}{4\sqrt{2}+5}\sqrt{41-10\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$.

19. (химфак-88.4) 4.

20. (геол.-94.7) $\frac{8}{\sqrt{15}}$.

21. (ВМиК-96.4) 1.

22. (филолог-84.4) $\sqrt{2}$.

23. (биофак-86.4) $\frac{15}{4}$.

24. (ИСАА-92.4) $\sqrt{14}$.

25. (ВМиК-94.4) 60.

26. (психфак-95.4) 8.

27. (геол.-89.4) $3-\sqrt{3}$.

28. (геогр-85.4) $\frac{\pi}{28}$.

29. (почв-83.4) $\frac{15\sqrt{7}}{16}$.

30. (ИСАА-98.4) $R = 8\sqrt{\frac{2}{3}} > 6.5$.

31. (почв-97.5) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 7.

32. (физфак-96.7) $c\sqrt{2+\frac{c}{b}}$.

33. (геогр-95.4) $\frac{35}{32}$.

34. $\dfrac{a\sin(\alpha+\beta)(1+3\sin^2\beta)}{12\sin\alpha\sin\beta}$.

35. (мехмат-96.3) $\sqrt{6}+1; 2\sqrt{10}$.

36. (почв-97.5) $3\sqrt{\dfrac{3}{19}}$.

37. (геогр-94.5) $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}; \dfrac{R\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}; R$.

38. (биофак-88.4) $30^\circ; 90^\circ$.

39. (геогр-96.4) $R(2\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2})$.

40. (ВМиК-83.4) $\dfrac{2\pi\sqrt{3}+9}{27}$.

41. (ВМиК-97.5) $\dfrac{5\sqrt{21}+1}{2}$.

42. (ВМиК-93.4) $\dfrac{12}{5}$.

43. (геол-98(1).5)
$\angle KML = \arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right) =$
$= \pi - \arcsin\dfrac{4}{5}$.

Ответы к §3. Подобие.

1. (м/м-86.2) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
2. (физ-91.4) $\sqrt{a(a+b)}$.
3. (ВМиК-80.3) 202.8
4. (экон-79.2) 15.
5. (почв-82.4) $3\sqrt{3}$.
6. (геогр-78.3) 2 и $\dfrac{5}{6}$.
7. (ИСАА-94.3) $\dfrac{\pi}{6}$.
8. (геогр-87.3) $\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$.
9. (филолог-81.3) $\dfrac{27}{8}$.
10. (геол-95.6) 45°.
11. (психфак-93.4) $\dfrac{\pi}{4}\mathrm{tg}^2\alpha$.
12. (ВМиК-94.4) $7+4\sqrt{3}$.
13. (экон-93.6) 195.
14. (м/м-78.3) 4.5
15. (экон-88.5) 11.
16. (филолог-87.4) $2\sqrt{3}$.
17. (физ-97.6) 18.
18. (мехмат-95.5) 9; 45.
19. (экон.К-87.5) $\dfrac{27}{10}$.
20. (физ-97.6) $n : m$.
21. (экон.К-85.3) 10.
22. (экон-87.5) $\dfrac{18}{7}$.
23. (почв-86.5) $2\sqrt{7}$.
24. (геогр-82.3) $\dfrac{2}{3}\sqrt{145}$.

Ответы к §4. Углы в окружностях.

1. (геогр-79.3) $2\sqrt{6}$.
2. (геол-95.7) $\sqrt{15}$.
3. (геогр-83.3) $\frac{1}{2}b^2\cos^2\beta\operatorname{ctg}\beta$.
4. (м/м-96.3) $56\sqrt{2}$.
5. (почв-88.2) $4\sqrt{3}\sin 7^\circ$.
6. (психфак-83.4) $|AB| = |BC| = 7\sqrt{3}$, $|DC| = \sqrt{21}$, $|AD| = 2\sqrt{21}$.
7. (почв-96.5) $4\sqrt{3}$.
8. (почв-84.4) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(c+\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.
9. (психфак-78.2) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.
10. (экон.К-84.4) 10.
11. (м/м-91.4) $\frac{nc}{m}$.
12. (почв-85.4) $\sqrt{2}$.
13. (геол.ОГ-81.5) 2.
14. (м/м-97.4) 9.
15. (ИСАА-95.4) $\sqrt{3}$.
16. (экон.К-86.4) $3\sqrt{3}$.
17. (экон-97.3) $\frac{3}{\sin 15^\circ}$ или $\frac{3}{\sin 75^\circ}$.
18. (физ-95.8) $\sqrt{pq}$.
19. (био-97.5) $\frac{1}{2}$.
20. (почв-94.5) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
21. (экон-90.3) $\frac{1}{4}+\sqrt{5}$.
22. (м/м-97.4) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$.
23. (геол-91.5)
24. (ВМиК-97.4) $\frac{2}{\sqrt{7}}$.
25. (био-95.5) $\frac{3\pi}{7}$.
26. (геол-93.5) $60^\circ; 75^\circ; 45^\circ$.
27. (физ-94.6) $\sqrt{m^2+n^2}$.
28. (геогр-95.4) $\sqrt{7}$.
29. (почв-81.4) $\frac{45}{2}$.
30. (ВМиК-92.5) $\frac{1}{4}(5+\sqrt{15})$.

Ответы к §5. Другие задачи на окружности.

1. (геол.ОГ-80.2) $3\sqrt{30}$.
2. (филолог-89.4) $2\sqrt{21}-9$.
3. (ИСАА-93.3) $\sqrt{7}$.
4. (био-92.3) 216.

5. (хим-91.5) $4\sqrt{3}+10\pi$.

6. (почв-95.4) $30°$.

7. (психфак-84.4) $6+2\sqrt{2}$.

8. (геогр-97.2) $p-r$.

9. (м/м-93.4) $\frac{15}{8}\sqrt{2}$.

10. (ВМиК-91.4) 6π.

11. (почв-90.3) $\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$.

12. (м/м-94.3)
$\frac{1}{2}+\frac{10\sqrt{6}}{49}+\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{5}{7}$.

13. (почв-80.3) $\frac{\pi+3}{6\pi}$.

14. (физ-92.6) $\frac{R^2}{a}$.

15. (хим-98(1).5) $\sqrt{53}$ или $\sqrt{13}$.

16. (физ-96.4) $90°$.

17. (био-90.4) $2\sqrt{\frac{34}{15}}$.

18. (физ-96.4) $\frac{25}{8}$.

19. (физ-96.6) $\frac{4aR^2}{16R^2-3a^2}$.

20. (хим-98(2).5) $\frac{27}{4}$.

21. (экон.К-80.2) $9, 12, 15$.

22. (почв-87.4) 8.

23. (м/м-83.3) $\frac{1}{2}(p-a)^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

24. (био-78.3) $2-\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

25. (псих-98.5) $(2b+l):c$.

26. (ВМиК-90.5) $-\sqrt{15}$.

27. (экон.В-98.5) $\frac{24}{7}$.

28. (психфак-86.5) $\frac{15}{3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

29. (м/м-98(3).4) $\arccos\frac{3}{4}$.

30. (геол.ОГ-82.5) $5\sqrt{\frac{3}{7}}$.

31. (психфак-96.4) $\frac{7}{3\sqrt{3}}$.

32. (м/м-85.3) $\frac{4\sqrt{6}}{5}$.

33. (экон.М-96.5) 5.

34. (хим-97.5) 6.

35. (ВМиК-86.4) $2\sqrt{9+6\sqrt{2}}$.

36. (физ-80.5) $\frac{5-4\cos\beta}{8\sin\beta}\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}b$

37. (физ-89.6) 1) $\sqrt{Rr}$; 2) $\sqrt{\frac{r}{R}}$.

38. (м/м-79.2) 1.

39. (геогр-81.4) $\frac{24}{\sqrt{145}}$.

40. (экон-89.5) $\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

41. (ИСАА-96.5) $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{13}})$.

Ответы к §6. Площади.

1. (хим-93.3) $\frac{1}{6}$.
2. (хим-94.4) 2.
3. (геол-96.7) $\frac{108}{5}$.
4. (геогр-90.4) 1:6.
5. (физ-87.5) $\sqrt{\frac{8c^2+3a^2}{35}}$.
6. (геол-97.4) $\frac{16}{9}$.
7. (ВМиК-95.3) $\frac{1}{4}\sqrt{(4b^2-a^2)(a^2-b^2)}$.
8. (филолог-85.4) $\frac{5}{2}(3\sqrt{3}+4)$.
9. (хим-94.4) 9.12 .
10. (геогр-92.4) 60.
11. (психфак-82.4) $\frac{1}{6}$.
12. (почв-77.4) $\frac{3}{4}ab$.
13. (био-81.3) $\frac{147}{8}$.
14. (геогр-91.4) 24.
15. (м/м-98(1).4) $\frac{1}{6}$.
16. (био-83.4) $\frac{3}{32}$.
17. (экон.К-79.2) $\frac{40}{3}$.
18. (хим-96.4) 9.
19. (психфак-81.2) $\frac{a^2}{2}(\sqrt{2}-1)$.
20. (физ-97.4) $2+\sqrt{6}$.
21. (физ-95.6) $\frac{ab}{(a+b)^2}$.
22. (ВМиК-78.3) $\frac{375}{272}$
23. (психфак-90.4) $90\sqrt{3}$.
24. (геол-78.4) $\frac{7}{4}$.
25. (био-82.5) $\frac{5}{24}$.
26. (хим-86.4) $\frac{189\sqrt{55}}{88}$.
27. (био-87.4) $\frac{10}{3}$.
28. (био-91.4) $\frac{48}{5}$.
29. (психфак-88.5) $\frac{7}{2}$.
30. (геогр-93.4) $\frac{25}{64}\sqrt{15}$.
31. (хим-80.4) $\arccos\sqrt{2(1-S)}$.

32. (геогр-97.5) $1+\sqrt{\frac{5}{2}}$.

33. (психфак-97.5) 625:121.

34. (м/м-96.3) $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$.

35. (экон-96.5) $3\sqrt{2}$.

36. (био-85.4) $\frac{S_1+S_2-\sqrt{(S_1+S_2)^2-4S_1S_2\sin^2\alpha}}{2}$.

37. (м/м-87.3) $\frac{3}{4}$.

38. (геол-77.4) $\frac{4}{3}$.

39. (филол-79.1) $10R^2\left(\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\right)$.

40. (почв-92.4) $\frac{81}{2}(\sqrt{3}-1)$.

Ответы к §7. Трапеции.

1. (био-77.2) $|NQ| = 2\sqrt{13}$.
2. (экон-80.3) 10.
3. (филолог-83.4) $\frac{49(3\sqrt{3}-5)}{3}$.
4. (ВМиК-85.2) $|RS| > |QR|$.
5. (м/м-93.3) Нет.
6. (физ-95.8) $\frac{\sqrt{(b-a)^2+(b+a)^2\operatorname{tg}^2\alpha}}{4\sin\alpha}$.
7. (физ-96.4) cd.
8. (м/м-95.4) 3:29.
9. (почв-93.4) 5; $\frac{5}{4}$.
10. (почв-91.4) $\frac{\sqrt{15}}{2}$.
11. (филолог-86.4) $\frac{15}{7}$.
12. (геогр-98.3) 3.
13. (почв-79.4) $10\sqrt{3}$.
14. (био-94.4) $\frac{18}{25+2\sqrt{130}+\sqrt{445}}$.
15. (физ-97.8) $\frac{bc}{a}$.
16. (м/м-94.4) $\sqrt{a(a-b)}$.
17. (био-79.3) $\frac{8R^3}{b}$.
18. (ВМиК-84.3) 8.
19. (м/м-89.3) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.
20. (геол-92.5) $\frac{19\sqrt{3}}{52}$.
21. (м/м-81.4) $2\sqrt{3}\cdot\frac{2\cos\frac{\delta}{2}+1}{2\cos\frac{\delta}{2}-1}$
22. (ИСАА-91.2) 72.
23. (физ-77.4) $\widehat{BAD}=\widehat{CDA}=\frac{\pi}{4}$, $\widehat{BCD}=\widehat{ABC}=\frac{3\pi}{4}$.
24. (филолог-80.4) $\frac{72}{5}$.

25. (м/м-77.2) 1 и 7.

26. (геол.ОГ-88.3) 162.

27. (хим-78.4) $\frac{2\pi}{3}$.

28. (филолог-88.4) $4 + 2\sqrt{7}$.

29. (филолог-91.5) $2\sqrt{3}$.

30. (экон-95.3) 36 или $8\sqrt{19}$.

31. (хим-95.4) 25.

32. (м/м-80.3) 5 и 3.

Ответы к §8. Параллелограммы.

1. (геол-87.1) $\frac{61\sqrt{3}}{4}$.

2. (хим-93.4) 8.

3. (экон-78.2) Длина стороны квадрата равна 17; точка O лежит внутри квадрата.

4. (физ-88.4) $2\mathrm{arctg}(5\mathrm{tg}\alpha)$.

5. (экон.К-78.2) $\cos\widehat{BAN} = \frac{7}{\sqrt{65}}$, $S_{ABCD} = \frac{78}{5}$.

6. (филолог-92.3) $\frac{9\sqrt{3}}{11}$.

7. (геогр-84.2) $\sqrt{13}$.

8. (экон.К-79.2) $7\sqrt{\frac{29}{5}}$.

9. (филолог-82.4) $\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18}$.

10. (экон-77.4) $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$ и $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$.

11. (м/м-88.3) $7\cos 40^\circ \cdot \mathrm{tg}20^\circ$.

12. (м/м-82.2) $4\sqrt{5}$.

13. (физ-79.5) $|MB| = d_1, |ND| = d_2$; $|MB| = d_2, |ND| = d_1$, где

$$d_1 = \frac{l(1-\cos\alpha) + 2a + \sqrt{V}}{2}$$

$$d_2 = \frac{l(1-\cos\alpha) + 2a - \sqrt{V}}{2},$$

где $V = 4a^2 + 4al(1-\cos\alpha) - l^2\sin^2\alpha$.

14. (био-80.4) $AD = 8$, $AB = 5$.

15. (хим-92.3) $10 \pm 4\sqrt{3}$.

16. (экон-91.3) $\frac{3(\sqrt{5} \pm 1)}{2}$.

17. (экон-86.4) $\frac{3}{4}(4\sqrt{2} - 5)$.

18. (геол-97.6) $\frac{75}{2} - 9\pi > 9$.

19. (почв-96.4) 4:5.

20. (ИСАА-97.6) 5:4.

Ответы к §9. Общие четырехугольники и многоугольники.

1. (психфак-77.4) $\sqrt{848+64\sqrt{13}}$, $\sqrt{848-64\sqrt{13}}$, $\sqrt{308+64\sqrt{13}}$, $\sqrt{308-64\sqrt{13}}$.
2. (ВМиК-98(1).4) $DC = 6$.
3. (экон-85.6) 3.
4. (хим-77.4) 1.
5. (био-93.5) $90°$.
6. (почв-95.6) $\sqrt{21}$.
7. (хим-89.4) $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $2\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.
8. (психфак-83.3) $AB : AC = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ при $n=2$ и $AB : AC = 1$ при $n=3$; при остальных значениях n решений нет.
9. (экон-94.6) 5:9.
10. (экон-84.5) $4\sqrt{3}$.
11. (психфак-87.5) $30°$.
12. (м/м-92.2) На продолжении.
13. (филолог-78.5) $1+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.
14. (психфак-92.3) 4.
15. (ВМиК-79.3) $|EM| = 2\sqrt{4\mathrm{tg}^2\alpha+3}$.
16. (почв-94.5) $\dfrac{\sqrt{54}-2}{4}$.
17. (геогр-89.5) $\sqrt{3}$.
18. (физ-96.8) $\arcsin\dfrac{a}{b}$.
19. (соц-98.4) $\dfrac{\sqrt{37}(2\sqrt{6}-1)}{3\sqrt{3}}$.
20. (геол-98(2).6) 319 .
21. (экон-92.5) 2; $\dfrac{14}{11}$.
22. (психфак-91.4) $\dfrac{189}{25}$.
23. (м/м-95.4) 10; 2; $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.
24. (био-89.4) $\arcsin\left(\dfrac{7\sqrt{3}-\sqrt{77}}{28}\right)$.
25. (психфак-89.4) $\sqrt{r^2+(p-a)^2}$.
26. (геол-94.8)
27. (геол-79.5) $\sqrt{\dfrac{65}{2}}$.
28. (физ-81.6) отношение расст. от т. E до прямых AD и BC равно 1; $S_{ADE}/S_{BCE} = m-1$.
29. (м/м-97.4) $9\sqrt{2}$.
30. (м/м-98(2).3) 22.

Ответы к §10. Задачи последних лет .

1. (ВМиК-99(1).4) $\dfrac{\sqrt{129}+31}{2}$.
2. (ВМиК-99(2).6) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

3. (ВМиК-00(1).4) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$.
4. (ВМиК-00.6) 2.
5. (геол-99(1).8) $4\sqrt{19}$.
6. (геол-99(2).4) 90°, 25°, 65°.
7. (геол-00(1).4) $\frac{h_N}{h_M} = \frac{4\sqrt{6}}{9}$.
8. (геол-00.6) $\frac{3}{2}\sqrt{15}$.
9. (экон-99.4) $S = \frac{42\sqrt{51}}{625}\, a^2$.
10. (экон-00.4) $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$.
11. (экон.В-99.3) $S = \frac{15\sqrt{7}}{64}\, c^2$.
12. (экон.М-99.3) $S = \frac{c^2}{8}\,(3+\sqrt{3})$.
13. (экон.М-00.4) 3:1.
14. (ИСАА-99.6) $6\,(\sqrt{2}-1)$.
15. (ИСАА-00.2) $R = 1$.
16. (физ-98(1).4) $\sqrt{10\sqrt{2}}$.
17. (физ-98(1).7) $\frac{b}{2}\sin\alpha$.
18. (физ-98(2).4) $2\sqrt{6}$.
19. (физ-98(2).8) $\frac{2bc}{b+c}$.
20. (физ-98.4) $\frac{b\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{3\sin(\alpha+\beta)}$.
21. (физ-98.6) $2R^2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = R^2\cdot\cos\alpha\cdot(1+\sin\alpha)$.
22. (физ-99(1).4) $\frac{7-3\sqrt{3}}{11}$.
23. (физ-99(1).6) $b\left(\frac{a}{c}\right)^2$.
24. (физ-99(2).4) $\frac{5}{2}$.
25. (физ-99(2).6) $\frac{q(2p+q)}{p+q}$.
26. (физ-99.3) 1.
27. (физ-99.6) $\sqrt{c^2-ab}$.
28. (физ-00(1).4) $\arccos\frac{4m^2-a^2-b^2}{2ab}$.
29. (физ-00(1).8) 4:3.
30. (физ-00(2).4) $\frac{17}{23}$.
31. (физ-00(2).8) $\frac{a^2-b^2}{a}$.
32. (физ-00.4) 102%.
33. (физ-00.6) $\frac{b^2-a^2}{b}$.
34. (м/м-99(1).4) 50°.
35. (м/м-99(2).4) 24.
36. (м/м-99.4) а) $1:1; 5:9$; б) $5:21$.

37. (м/м-00(1).4) 20.

38. (м/м-00(2).3) $\frac{16}{5}$.

39. (м/м-00.4) 6; 2.

40. (хим-99(1).4) $4\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{\pi}{9}$.

41. (хим-99.4) $\sqrt{6}$.

42. (ВКНМ-99(1).4)
$S = \pi \cdot 50(2+\sqrt{2}) > 510$.

43. (хим-00(1).4) $\pi\sqrt{5}$.

44. (хим., ВКНМ-00.4) 12π.

45. (био-99.4) $\frac{22}{7}$.

46. (биол-00.3) $\frac{3\sqrt{15}}{4}$.

47. (почв-99(1).5) $\frac{1}{6}$.

48. (почв-99.6) $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

49. (почв-00(1).5) $\frac{49}{4}$.

50. (почв-00.6) $1+\sqrt{3}$.

51. (геогр-99(1).4) 1) $60°$; 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

52. (геогр-99.5) $\frac{3}{2}$.

53. (геогр-00(1).4) 5.

54. (псих-99.5) $\frac{1820\sqrt{21}}{341}$.

55. (соц-99.3) 1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{234}{25}$.

56. (соц-00.5) $17\frac{11}{17}$.

57. (филол-99.3) 15.

58. (филол-00.2) 11.

Стереометрия.

Ответы к §1. Общие свойства тетраэдра.

1. (м/м-70.5) $\frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{6}\sin\varphi}$.
2. (м/м-71.3) $\frac{2}{3}$.
3. (м/м-72.4) $\sqrt{3}$.
4. (м/м-73.4) $\frac{2pq\cos\frac{\alpha}{2}}{p+q}$.
5. (м/м-74.4) 36.
6. (м/м-77.5) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
7. (м/м-78.5) 3.
8. (м/м-79.5) $\sqrt{3}-1$.
9. (м/м-82.5) $\frac{5\sqrt{10}}{32}$.
10. (м/м-83.5) $\frac{R}{8h}\left(17-\sqrt{17}\right)$.
11. (м/м-87.6) 9 *см*.
12. (м/м-94(2).5) $8\sqrt{6}$.
13. (м/м-95(1).5) $S_{KLMN}=52$.
14. (м/м-95(2).5) $\sqrt{6}$.
15. (м/м-98.6) 48.

    $\frac{\sqrt{21}}{2}$.
16. (м/м-00(2).6) $S_\alpha : S_\beta = 224 : 219$.
17. (ВМиК-77.5) $\frac{\sqrt{10}}{6}$.
18. (ВМиК-81.6) $\frac{\sqrt{87}}{4}$.
19. (ВМиК-87.6) 231 : 67.
20. (ВМиК-89.6) $\frac{8}{7}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.
21. (ВМиК-94(1).6) $CM=22$.
22. (ВМиК-97(1).6) Объём пирамиды может принимать любые положительные значения до $\frac{3}{2}V$ включительно.
23. (физ-71.4) $\frac{3b}{32}\sqrt{4h^2+a^2}$, угол равен $\operatorname{arctg}\frac{2h}{a}$.
24. (физ-73.4) $\angle BSC = 75°$.
25. (физ-75.5) $a\sqrt{\frac{439}{108}}$.
26. (физ-76.5) $EF = 2$ *см*.
27. (физ-86.5) 95 : 9.
28. (физ-88.6) $\frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3}$.
29. (физ-97.6) $\frac{21\sqrt{15}}{10}$.
30. (хим-87.4) $\frac{b^3}{12}\lambda\sqrt{\lambda(\lambda+1)}$.

31. (био-81.5) $\dfrac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}$.

32. (био-84.4) $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{6}\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{19}\right)\right)b^2$.

33. (био-98.4) $\dfrac{91}{25}$.

34. (почв-78.4) $\arcsin\left(\dfrac{4}{5}\sin\alpha\right)$.

35. (геогр-88.4) 6 *см.*

36. (геогр-99(1).6) $\dfrac{15}{2}$, $\dfrac{9}{4}\sqrt{551}$.

37. (геогр-99.6) $50\sqrt{2}$.

38. (геол.ОГ-79.5) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

39. (геол.ГФ-83.6) $\dfrac{\pi}{20}\left(\sqrt{10+6\sqrt{10}}-\sqrt{10}\right)$.

40. (геол.ОГ-83.6) $\dfrac{4}{5}\sqrt{13}$.

41. (геол.ГФ-84.6) $\dfrac{6}{\left(\sqrt{19}+2\sqrt{15}+2\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2}$.

42. (геол.ОГ-84.6) $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

43. (экон.К-77.5) $\dfrac{1}{8}V$.

44. (экон-86.6) $\sqrt{3}$.

45. (экон-92.4) $\dfrac{\pi}{4}$.

46. (экон-99.6) $\dfrac{d^3}{3}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\cos^2 2\beta}$.

47. (псих-92.5) $5\sqrt{2}$.

Ответы к §2. Тетраэдры со специальными свойствами.

1. (м/м-75.4) $SD=9$.
2. (м/м-90.6) $\sqrt{3}$ или $\dfrac{19\sqrt{3}}{25}$.
3. (м/м-96.5) $\dfrac{1}{49}\left(48\sqrt{13}-74\sqrt{3}\right)$.
4. (м/м-98(1).5) 2 или $\dfrac{2}{3}$.
5. (ВМиК-74.5) 400.
6. (ВМиК-75.5) $\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}50^\circ$.
7. (ВМиК-80.6) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.
8. (ВМиК-85.6) $\dfrac{60\sqrt{2}}{11\sqrt{3}+\sqrt{43}}+\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$.
9. (ВМиК-94.6) $\sqrt{133}$.
10. (ВМиК-95(1).6) $\dfrac{36-9\sqrt{6}}{5}$.
11. (ВМиК-96(1).6) $41\left(\dfrac{2\sqrt{105}}{110}+\dfrac{\sqrt{3}}{10}+\dfrac{2}{22}\right)$.
12. (ВМиК-98.4) 216.
13. (физ-70.4) $\dfrac{1}{6}$.

14. (физ-71.4) $\frac{4a}{\sqrt{114}}$.

15. (физ-74.5) $a^3\frac{\sqrt{2}}{54}$.

16. (физ-78.5.Н) $\frac{a}{4b}\sqrt{3b^2-a^2}$.

17. (физ-78.5.С)
$\frac{4}{\sqrt{5}}ad-\frac{8\sqrt{2}}{5}d^2$.

18. (физ-82.5) $2\arcsin\left(\frac{1}{2}\sin\alpha+\right.$
$\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}\right)$.

19. (физ-84.5)
$\frac{\sqrt{3}}{12k}\left(1+k+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3$.

20. (физ-89.4) $\frac{1}{\sqrt{3}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}$.

21. (физ-90.6)
1) $\pi\sqrt{\frac{3-k}{5+k}}$.
2) От 0 до $\pi\sqrt{\frac{3}{5}}$.
3) При $1<k<3$.

22. (физ-94.8) $\frac{2a^2}{9\sqrt{3}\cos\alpha}$.

23. (физ-95(1).6)
$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$.

24. (физ-95(2).8) $\frac{n}{m+n}\cdot\frac{V}{d}$.

25. (хим-73.4) $3\sqrt{15}\left(\sqrt{5}+1\right)^2$,
$2\arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}$.

26. (хим-74.5) $R=\frac{Hr}{r+\sqrt{r^2+4H^2}}$.

27. (хим-84.4) $4\left(\sqrt{3}+1\right)$.

28. (почв-82.5) $\frac{\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

29. (геогр-83.5) $\arccos\frac{46}{\sqrt{2641}}$.

30. (экон.К-70.1) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$.

31. (экон.К-76.4) 16, 4 $м^2$.

32. (экон.В-99.5) $\frac{\sqrt{2}}{12}d^3$.

33. (псих-70.4) $\frac{4}{9}\sqrt{3}\pi\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\left(\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}+\right.$
$\left.+\operatorname{tg}^9\frac{\alpha}{2}++\operatorname{tg}^{15}\frac{\alpha}{2}\right)$.

34. (псих-79.4.Н) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

35. (псих-79.4.С) $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

36. (филол-74.5)
$$\frac{6\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)^3}.$$

37. (филол-75.5) $r = \dfrac{a}{10}$.

Ответы к §3. Пирамиды, призмы и другие многогранники.

1. (м/м-71.3) $\dfrac{1}{3}$.
2. (м/м-75.4) $\dfrac{7}{3}$.
3. (м/м-81.5) $\dfrac{1}{4}\left(S + \sigma k\sqrt{2-2l}\right)$.
4. (м/м-82.5) $\dfrac{5\sqrt{5}}{16}$.
5. (м/м-84.5) 4 *см*^{2}.
6. (м/м-86.6) $\dfrac{160\sqrt{3}}{3}$.
7. (м/м-88.4) $\arccos\dfrac{5}{8}$.
8. (м/м-91.6) 1.
9. (м/м-92.5) 12.
10. (м/м-93(1).5) $\dfrac{1}{3}$.
11. (м/м-96(1).6) 9.
12. (м/м-96(2).5) Пересекается ребро AB, делится в любом отношении от 0 до $\dfrac{1}{56}$, считая от вершины A.
13. (м/м-98(2).5) $CS = 3$, $CD = \dfrac{27}{8}$.
14. (м/м-99(2).6) 126.
15. (м/м-00.6) $S_{ASD} = \sqrt{38}$.
16. (ВМиК-70.5) $\arccos\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}}$.
17. (ВМиК-71.5) $-\dfrac{2h^2}{3}\cdot\dfrac{\sin^3\dfrac{\alpha}{3}}{\cos\dfrac{\alpha}{3}\cdot\cos\dfrac{2\alpha}{3}}$, $\left(\alpha > \dfrac{3}{4}\pi\right)$.
18. (ВМиК-72.4) $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.
19. (ВМиК-78.5) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$.
20. (ВМиК-84.6) $\sqrt{8}$.
21. (ВМиК-95.6) $\dfrac{31\sqrt{2}+36}{16}$.
22. (ВМиК-98(1).6) $\sqrt{148-34\sqrt{3}}$.
23. (ВМиК-99(1).6) $\dfrac{1}{6}V - \dfrac{2}{3}V^3R^2\left[\left(\dfrac{m^2-4r^2}{2}\right)^2 - 2Vm\right]^{-2}$.
24. (ВМиК-99.4) $2\sqrt{3\sqrt{2}-4}$.
25. (ВМиК-00.4) $\arccos\left(\dfrac{9}{\sqrt{150 \pm 24\sqrt{3}}}\right)$.
26. (физ-77.5) $\dfrac{11}{\sqrt{170}}$.

27. (физ-81.5) $\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$.

28. (физ-82.5) $2\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\beta - \sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}\right)\right)$.

29. (физ-84.5) $\dfrac{4}{3\sqrt{3}m}\left(m+\sqrt{2}\right)^3$.

30. (физ-85.5) $\dfrac{\pi}{4}+\arcsin\left(\dfrac{2\pi a-1}{\sqrt{2}}\right)$; $0<a<\dfrac{1}{\pi}$.

31. (физ-87.6) $\dfrac{1024}{9}$; $2\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{34}}{4}\right)$.

32. (физ-89.4) $\dfrac{\sqrt{6}}{10}\left(5-\sqrt{15}\right)$.

33. (физ-91.6)
1) $7:20$;
2) $\dfrac{9}{4}Sd$.

34. (физ-94(2).8) $\dfrac{Sd}{3}$.

35. (физ-95.6) $\dfrac{2}{3}H^3\left(\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}-1\right)$.

36. (физ-96(1).6) $\dfrac{b^3}{6}\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\left(1-\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

37. (физ-96(2).7) 12.

38. (физ-96.6) $d^3\sin\beta\sin\gamma\sqrt{\cos^2\gamma-\sin^2\beta}$.

39. (физ-97(1).8) $\sqrt{11}$.

40. (физ-97(2).4) 3.

41. (физ-97(2).8) $\dfrac{4}{3}r^3\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{-\cos\alpha}$.

42. (физ-99(1).8) $8b\dfrac{\sin^2\beta}{\sqrt{1+\cos^2\beta}}\mathrm{arctg}\,(\cos\beta)$.

43. (физ-99(2).8) $\dfrac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\mathrm{ctg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{3}a$.

44. (физ-99.7) $\angle ASC=\arccos\dfrac{\sqrt{13}-1}{4}=2\arccos\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}+3}{8}}$.

45. (хим-70.5) 7 : 17.

46. (хим-71.5) $\dfrac{9\pi r^3}{5\sqrt{10}}$.

47. (хим-72.4) $\dfrac{4\sqrt{2}R^2}{\sin\alpha}$.

48. (хим-76.5) $\sqrt{6}$ *см*.

49. (хим-78.3.Н) Параллелепипед, сторона основания которого имеет длину 2 *см*, а боковое ребро имеет длину 1 *см*; искомый объём равен 4 *см*^{3}.

50. (хим-82.4) $\sqrt{S_1}\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{S_1}{S_2}\right)^2}$.

51. (хим-83.3) $\frac{5}{18}V$.

52. (хим-84.4) 8.

53. (хим-85.4) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ *см*^{3}.

54. (хим-87.4) $\frac{a^3\sqrt{2}\,(\gamma+2)}{6\cdot\sqrt{\gamma}\,(\gamma+1)}$.

55. (хим-90.5) $\frac{3}{2}\sqrt{183}$.

56. (хим-99(1).5) 2π.

57. (хим-99.5) 24.

58. (био-82.3) $a^3(\sqrt{2}-1)^3$.

59. (био-84.4) Площадь сечения пирамиды равна $\frac{3\sqrt{14}}{16}a^2$. Существует единственная такая секущая плоскость.

60. (почв-82.5) $\frac{12}{10+\sqrt{22}}$.

61. (геогр-82.5) 28 *см*^{2}.

62. (геогр-84.4) $5\sqrt{2}$.

63. (геол.ГФ-87.6) $3\sqrt{41}$ *см*.

64. (геол.ОГ-73.4) $\frac{8\sqrt{6}}{25}$*см*^{2}.

65. (геол.ОГ-74.5) $V_1 : V_2 = 169 : 792$.

66. (геол.ОГ-84.6) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

67. (геол.ОГ-85.6) $\sqrt{61}$.

68. (геол-94.10) $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

69. (геол-99(1).6) $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

70. (геол-99.7) 384.

71. (экон-70.1)
Размеры бруска $a\times b\times c$, где
$a = 10\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{7+\sqrt{19}}}\right)$,
$b = 10\left(1-\sqrt{1-\frac{3}{7+\sqrt{19}}}\right)$
и $c = \left(\frac{7+\sqrt{19}}{2}\right)$.

72. (экон.К-73.3) $\frac{1}{2}(c+h)\,S$.

73. (экон.К-76.4) $16,4$ *м*^{2}.

74. (экон.К-84.6) Длины отрезков SQ и SN равны $\frac{5}{2}$ и $\frac{5}{3}$ соответственно.

75. (экон.К-86.6) 72 *см*^{2}.

76. (псих-71.2) Точка P совпадает с точкой C, либо с точкой C_1.

77. (псих-73.3) $a\sqrt{\frac{3}{70}}$.

78. (филол-73.2) Подобное деление можно осуществить
$n\,(n-1)+2$ способами.

79. (филол-76.5) Отношение объёмов призмы и шестиугольной пирамиды равен $\frac{32\sqrt{21}}{147}$.

80. (филол-77.5) $7:20$.

81. (филол-81.5.C) $\sqrt[3]{\dfrac{8V\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{3\,(2\cos\alpha-1)}}}$.

82. (филол-90.5) 8.

83. (ИСАА-99.4) $\dfrac{\mathrm{tg}65^\circ}{6}$.

Ответы к §4. Шар, цилиндр, конус и другие фигуры вращения.

1. (м/м-76.4) $\dfrac{1}{7}$.
2. (м/м-76.4) $\dfrac{68}{3}$.
3. (м/м-85.5) $\dfrac{r_1}{r_2}\times\sqrt{2R^2-r_2^2+2R\cos\varphi\sqrt{R^2-r_2^2}}$.
4. (м/м-89.5) $\dfrac{36}{11\sqrt{11}}\pi$.
5. (м/м-93.5) $R\cdot\dfrac{4}{7}\sqrt{14}$.
6. (м/м-94.5) $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$.
7. (м/м-95.5) $\angle BAC=75^\circ$.
8. (м/м-97(1).6) $\sqrt{\dfrac{73}{88}}$.
9. (м/м-97(2).5) 8.
10. (м/м-97.6) $\dfrac{18}{5}$.
11. (м/м-99.6) $\dfrac{\sqrt{155}}{10}$.
12. (м/м-00(1).6) $SS_1=2$.
13. (ВМиК-70.5) $\arccos\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\cdot\left(\sin\frac{\beta}{2}-\sqrt{\sin^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)\right)$.
14. (ВМиК-70.5) $2\arccos\dfrac{\cos\beta-\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$.
15. (ВМиК-73.4) $SA=1,\ SB=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $SC=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
16. (ВМиК-88.6) $\dfrac{42+12\sqrt{11}}{5}$.
17. (ВМиК-91.6) $3\sqrt{\dfrac{17+\sqrt{201}}{22}}$.
18. (ВМиК-00(1).6) $50\left(5\sqrt{2}\pm4\right)$.
19. (физ-72.4) $1-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
20. (физ-79.6) $\dfrac{2a\mathrm{tg}\alpha\sqrt{2rl\sin\alpha-(r^2+l^2)\sin^2\alpha}}{\sqrt{l^2-a^2\cos^2\alpha}}$.
21. (физ-80.6) $\dfrac{\pi}{2}-\arccos\left(\cos\varphi-\dfrac{2\sin^2\dfrac{\beta}{2}}{\cos\varphi}\right)$.

22. (физ-83.6) $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$;

$$\frac{\sqrt{3\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}-1}-\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{\sqrt{3\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}-1}+\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}}.$$

23. (физ-92.8) $\dfrac{R\left|\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\varphi-1\right|}{\sin\varphi}$.

24. (физ-93.8) $\left(\dfrac{2R\sqrt{r}-r\sqrt{3R+r}}{2(R-r)}\right)^2$.

25. (хим-71.5) $2\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}r$.

26. (хим-81.4.Н) $2\mathrm{arctg}\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$.

27. (хим-81.4.С) $12\pi r^3$.

28. (био-71.2) 2.

29. (био-75.2) 2.

30. (био-96.4) $32\pi\sqrt{78}$ *см*^{3}.

31. (геогр-80.3) $\dfrac{1}{12}\pi HR^2$.

32. (геогр-89.4) 6π.

33. (геогр-96(1).5) Наибольшее значение боковой поверхности цилиндра равно $2\pi R^2$. Отношение его высоты к радиусу сферы в этом случае равно $\sqrt{2}$.

34. (геол.ГФ-72.5) 6 *см*.

35. (геол.ГФ-74.4) $V=\dfrac{4\pi}{9}$ *см*^{3}.

36. (геол.ГФ-80.5) 20 *см*.

37. (геол.ГФ-85.6) $50\arccos\dfrac{4}{5}$.

38. (геол.ОГ-77.5.С)
$$\frac{b}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

39. (экон-71.5)
$\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+1}R$ или $\dfrac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}R$.

40. (экон.К-71.4) Минимально возможный радиус шара $x_{min}=\left(\sqrt{R+r-\rho}-\sqrt{R}\right)^2$.

41. (экон.К-82.6) Наибольшее возможное целое значение m равно 8.

42. (псих-70.4)
$$\frac{2\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left(1+\mathrm{tg}^6\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\mathrm{tg}^4\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^8\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

43. (псих-72.4) Меньшая часть составляет $\dfrac{7}{27}$ объёма всего шара.

44. (псих-94.4) 21 : 23.

45. (филол-81.5.Н) Высота равна $\dfrac{4}{3}R$, радиус основания равен $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$.

Учебно-методическое пособие

Воронин Владимир Павлович
Федотов Михаил Валентинович

Подготовка к вступительным экзаменам в МГУ.
ГЕОМЕТРИЯ

Издание пятое, исправленное и дополненное.

Редактор Федотов М.В.
Компьютерный набор в LaTex Воронин В.П., Федотов М.В.
Компьтерные рисунки Воронин В.П., Разгулин А.В.

ИД № 00510 от 01.12.99
Подписано в печать 24.07.2001. Формат 60×90 1/16.
Печать офсетная. Бумага газетная
Печ. л. 9,75. Тираж 1000 экз. Заказ 6621

ООО «МАКС-Пресс»
107066, г. Москва, Елоховский пр., д. 3, стр. 2

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ,
140010, г. Люберцы, Октябрьский пр-т, 403.
Тел. 554-21-86